



TITLE:

間欠的集団動力学出現における普遍性の探索(博士論文)

AUTHOR(S):

太田, 洋輝

CITATION:

太田, 洋輝. 間欠的集団動力学出現における普遍性の探索(博士論文). 物性研究 2011, 96(2): 216-285

ISSUE DATE:

2011-05-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/169545>

RIGHT:

博士論文

間欠的集団動力学出現における普遍性の探索

Seeking universality in the appearance of intermittent collective dynamics

太田 洋輝

東京大学大学院総合文化研究科 広域科学専攻関連基礎科学系

目次

第1章	序論	218
1.1	多体系の巨視的性質と統計物理学	218
1.2	この論文の位置づけ	220
1.3	主要結果の要約	225
第2章	希釈ボンド Ising 模型の Glauber 動力学における集団動力学	229
2.1	先行研究と研究動機	229
2.2	模型	230
2.3	有効力学系の導出	231
2.4	力学系 (2.19) の時間依存解	235
2.5	結び	239
2.6	付録 A: 臨界温度 $T_G(p)$	240
2.7	付録 B: 平衡における関係式	241
第3章	ランダム磁場 Ising 模型のゼロ温度 Glauber 動力学における集団動力学	244
3.1	先行研究と研究動機	244
3.2	模型	245
3.3	秩序変数の時間発展方程式	245
3.4	分岐解析	247

3.5	有限サイズゆらぎ	249
3.6	結び	251
第4章	拘束動力学模型における集団動力学	254
4.1	先行研究と研究動機	254
4.2	模型	255
4.3	動力学の第0次近似解析	256
4.4	動力学の摂動解析	258
4.5	摂動系列について	263
4.6	結び	266
第5章	興奮型蔵本模型における集団動力学	270
5.1	先行研究と研究動機	270
5.2	模型	270
5.3	相図と集団発火現象	272
5.4	理論解析	274
5.5	結び	276
第6章	総括	278
6.1	各章に渡ってみられる普遍性	278
6.2	動的ガラス転移とこの論文で得られた知見との関係	279
第7章	付録	282
7.1	Bethe 格子	282
7.2	力学系理論における分岐とゆらぎの影響	283

第1章 序論

1.1 多体系の巨視的性質と統計物理学

机の上で球を押すと、転がって行く。2個の球をお互いの方向へ転がすと、やがては衝突する。このような1体または2体の運動の様子は、ある程度理想化すれば、Newton方程式に対して紙とペンの計算をすることによって、振る舞いを理解することができる。しかしながら、身の回りにはこのような単純な現象だけではない。例えば、空を見上げると雲があり時には雨が降る。このような多体系特有の現象の例を挙げるときりがなく、その最たるものは我々人間を含む生物であろう。またそのような多体問題は、一般に上で挙げたように1体や2体問題と同様に理解することが難しい。この状況は、原子尺度の現象を記述する量子力学におけるSchrödinger方程式も同様である。つまり、水素原子の振る舞いは理解できても、分子または原子や電子の集合体である金属になると、途端に振る舞いの理解は困難になる。

統計物理学の一つの大きな目標は、多体系の巨視的振る舞いそしてゆらぎの性質が、どのような論理で、微視的階層つまり1体の振る舞い、またはそれら要素間の相互作用から決定されるのかを理解することであると言ってよいだろう。

1.1.1 確立された理論枠組み [平衡統計力学]

多体系といっても、その構成要素が異なれば、その振る舞いは様々である。もし、それらの性質を統一的に扱う枠組みがあれば、我々は様々な系の様々な現象に対して同じ土台を出発点にして議論することができる。統計物理学におけるそのような確立した理論枠組みとして、平衡統計力学がある。この枠組みは、平衡条件下の多体系定常状態の巨視的性質やゆらぎの性質を、微視的自由度の状態の確率分布を使って記述することができる。粒子間相互作用がない理想気体等の単純な場合には、この枠組みに依って微視的自由度を積分などの操作に依って消去し、系の巨視的性質はその系に課される環境条件だけで書き下すことができる。こうして微視的自由度を消去した多体系の巨視的性質は、平衡熱力学と矛盾なしに表現される。

ただし、このような自由度の消去が実際に実行可能かどうかは別の問題である。一般には、要素間相互作用がある場合は容易ではない。それをどのように実行するか、または計算機でどのように効率的に評価するかは、現在でも活発に研究されている分野である[1, 2]。

条件 状態	平衡	非平衡
定常		
非定常		

図 1.1: 多体系の状態の分類

1.1.2 理論枠組み [非平衡統計力学] の可能性

1.1.1 で述べたような平衡統計力学の成功をみれば、「非平衡統計力学は？」と考えるのは一つの自然な拡張であろう。つまり、非平衡条件下の多体系定常状態の巨視的性質やゆらぎの性質を、微視的自由度の配置の確率分布を使って記述することができる非平衡統計力学の建設は、当然統計物理学の目標となりうる。しかしながら、20 世紀初頭から長い歴史をかけても未だそれが確立していないという事実は、その建設が簡単ではないことを私たちに突きつける。

最近では、線形応答領域 [3, 4] を越えた非平衡条件下でのゆらぎ自体やその応答との関係、断熱的でない操作による定常状態間のエントロピーの変化についての知見が深まってきていて、この分野における今後の進展が期待される [5, 6]。

1.1.3 統計物理学が進むべき一つの方向: 多体系における動力学

雲の動きや雨が降るという現象は、平衡条件下の定常状態の性質つまり平衡統計力学だけでは、完全な理解には至らないことに注意しよう。つまり、我々はそれらを理解しようとする際に、多体系の動力学に直面するのである。また 1.1.2 で述べたように、非平衡統計力学の建設を目指す際にも、多体系の動力学の理解は重要な鍵になってくる可能性がある。また一般に、実際の物質の実験において、系の定常状態を探ろうとした時にも、我々はやはり多体系の動力学に直面することになる。ちなみに、多体系の状態は、図 1.1 のように分類される。

よって、平衡条件下の定常状態の知見が蓄積され、非平衡統計力学が未だ建設されていない現状では、平衡条件下の緩和やそもそも非平衡条件下の動力学についての知見の獲得は、統計物理学が次の段階に進むための一つの方向性と言える。

1.1.4 集団動力学の発現機構と普遍性

多体系における動力学特有の問題と言え、集団動力学が挙げられよう。このような問題意識は何も新しいことではなく、古くから有名な現象に気液臨界点に伴う動的臨界現象

がある [7]。集団動力学の発現には、様々な機構があるが、しばしば複数の多体系間で同様な振る舞いがみられ、これを普遍性という。

具体的には、異なる物質であっても、各々の物質を各々の臨界点に設定しさせれば、両者の振る舞いは同様な振る舞いを見せるのである。普遍性の存在は、なんらかの統一的な理論枠組みの建設可能性を示唆しており、統計物理学が進歩して行く際に、重要な概念であると言える。次に、普遍性と理論枠組みの関係性についての有名な2つの例を振り返ってみよう。

普遍性の例 1: 平衡臨界現象

ここでは、原理的に平衡統計力学の範疇である臨界現象を例にとって、普遍性についてより詳しく振り返ってみよう。例として、 d 次元超立方格子上的 Ising 模型を考える。この系は2次元では Onsager による厳密解が発見されており、ある臨界温度で帯磁率が発散することが知られている。その臨界点付近では、系の相関長も増大する。これらの増大の仕方は臨界点からの環境変数の変化に関してべき的であり、この指数は臨界指数と呼ばれる。

この臨界指数は、その多体系がある空間次元が同じであれば系の詳細に依存しづらく、3次元を含む低次元系では、系の次元に敏感に依存するという性質を示す。また、いくつかの物理量に現れる臨界指数の組は、その集団現象を特徴づけることになる。よって、臨界指数は普遍性をもつと呼ばれる。Ising 模型を含む各スピン模型の普遍性を共有する場の理論（模型の対称性から決まり、Ising 模型の場合は ϕ^4 場の理論 [8]）も、普遍性の一つの数理的表現と言えよう。

普遍性の例 2: 流体力学

ここでは、流体力学を考えよう。流体力学という理論枠組みは、様々な種類の流体に適応可能である。つまり、粘性係数などの物質固有の量を知ってさえいれば、Navier-Stokes 方程式を解くことに依って様々な粘性流体の運動は理解できるのである。これも、巨視的時間発展方程式が物質の詳細に依存しづらいという意味で、普遍性の一例と言える。

このように流体力学自体確立した理論枠組みであるが、Newton 方程式からの流体方程式の導出は、未だ解決しない難問の一つとして残っている。Newton 方程式とは限らない多体系の微視的動力学から巨視的時間発展方程式を導くことは、流体極限の問題として数学を中心に現在でも発展し続けている [9]。

1.2 この論文の位置づけ

この節では、1.2.1 で様々な集団動力学について取り上げ、1.2.2 でそれらの理解に現れる共通な数理的表現について触れる。1.2.3 では、ガラスやジャミング転移に伴う集団動力学に関連してこの論文の大きな目標を設定する。1.2.4 では、その目標に立ちふさがる諸問題を紹介し、1.2.5 では、それを受けてこの論文が取り組む具体的問題を設定し、3章

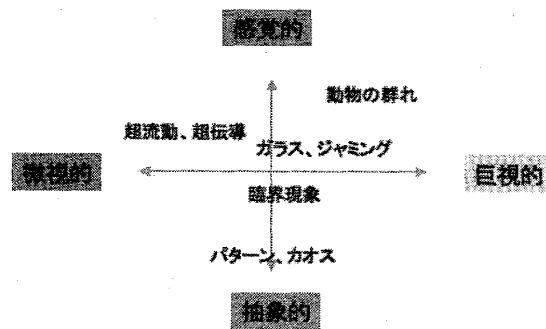


図 1.2: 様々な集団動力学の概観図

以降の要約を行う。1.2.6 では、この論文で得た知見が、統計物理学においてどのような意義を持つのかを述べる。

1.2.1 様々な集団動力学

この小節では、便宜的に様々な集団動力学とその発現機構の理論的理解に軽く触れる。当然整理の仕方は一意ではなく、他の見方をすれば異なる題目のものが同類になり、同類としたものが異なる分類にもなり得ることに注意して頂きたい。図 1.2 に概観を示した。

動的臨界現象

集団動力学と言えば、物質の気液臨界点における動的臨界現象が古くから知られている。この普遍性を共有する系として、格子ガスの川崎動力学や対応する保存場の方程式が知られている。現在では臨界点での集団動力学の一発現としての輸送係数異常性は、対応する保存場の方程式に対して、繰り込み群の方法を適用して導出されるという理解に至っている [7]。

超流動 (超伝導)

気液臨界点の尺度に比べ極微な世界における集団動力学としては、量子力学で記述される超流動、超伝導が有名な例として挙げられよう。Gross-Pitaevskii 方程式や Ginzburg-Landau 理論による現象の記述はそれらの理解への入り口と言ってよいだろう [10, 11]。現在ではレーザーで拘束された原子多体系の実験において、高精度の制御が実現されてより定量的な議論が可能になってきている。

動物の群れ

我々が生活する世界と同程度の時空間尺度においては、蛍等のリズムを持つ個体が相互作用した集合体 [12] や、鳥や魚の群れなどの駆動方向の内部自由度を持つ個体が相互

作用する多体系で起こる集団動力学に注目が集まっている [13]。これらの多体系に関しては、集団動力学の発現機構の普遍性に関する研究が進行中であり、真に新しい普遍性の発見が期待される。

パターン、カオス

動的臨界現象の研究以降、平衡条件下とは限らない抽象的な各種場の方程式や格子模型における秩序化過程やパターン形成が議論され、遅い自由度に対する縮約理論も発展した [14, 15]。また、多体系においてもなお、巨視的物理量がカオスになるという集団カオスとも呼ぶべき現象も発見され、現在もその数学的取扱いについて研究が進展している [16]。その中では後から実験で発見された集団動力学もあるが、未だ実験で実現されていない集団動力学もある。それらの実験での実現は興味深い将来の研究課題として残っている。

ガラス、ジャミング

近年、古くからの問題であるガラス転移の平均場模型が提案され、その集団動力学に再び注目が集まっている [17]。その知見が高まってくると時を同じくして、ガラス転移付近の振る舞いと類似性から非熱的斥力粒子系のジャミング転移に伴う集団動力学にも注目が集まって来ている [18]。また、神経網などの様々な系において、上記の系で観測されるものと似た雪崩現象が起きることが観測されており、それらの背後の普遍性についても注目が集まりつつある [19]。しばしば、これらの系の集団動力学の振る舞いは「間欠的」と呼ばれる。

1.2.2 集団動力学の発現機構における普遍性と数理的表現

これらの一見ばらばらな集団動力学の理解についてはいくつかの共通点がある。一つは、理想的な状況において、似たような巨視的量で閉じた数理的表現が見いだされていることである。例えば、Ginzburg-Landau 型の方程式は、動的臨界現象、超流動（超伝導）や振動子、パターン形成など様々な集団動力学の数理的表現として現れる。

2つめはそれと関係して、転移点に向かっての集団性が臨界指数で特徴づけられるなど何らかのスケール関係が見られることが挙げられる。この様子は、その多体系が古典力学従うのか、量子力学に従うのか、または確率過程に従うのかにはあまり敏感ではない。

ガラスやジャミング転移に伴う集団動力学発現の普遍性を捉える数理的表現としては、モード結合方程式が有望な候補として挙げられている。しかしながら、その限界性も明らかにされつつあり、ガラスやジャミング転移に伴う集団動力学を捉える適切な数理的表現への知見は乏しいのが現状である。

1.2.3 進む方向: ガラス、ジャミング転移に伴う間欠的集団動力学の理解

この論文は、20世紀終わりに急速に理解が進展しているガラスやジャミング転移に伴う間欠的集団動力学の発現機構の理解に向かって進んで行きたい。ここで注意しておきたいのは、急速な理解は、主にガラス転移においては平衡状態の性質、またジャミング転移においては静的性質に関してなされていることである。一方1.2.2にも少し触れたように、動力学に関してはいくつかの物理量に関するスケーリングが実験や数値シミュレーションで確認されているが、その発現機構の理解は浅い。

特に、この論文は、特に1.2.2で述べた他の様々な多体系の集団動力学の理解と同様に、集団動力学の発現機構を捉えることができる巨視的量で閉じた数理表現を見いだすこと、に焦点を当てたい。もしガラスやジャミング転移が広い物質群で起こる普遍的現象あれば、その普遍性を体現する数理表現があることが予想されるし、今までに確認されているスケーリング関係などはその存在を示唆している。それは時には、少数の秩序変数で閉じた時間発展方程式の導出ということになるかもしれないし、また異なる形を取るかもしれない。

1.2.4 解決すべき諸問題

1.2.3に述べた通り、この論文の目指す所は、もちろんガラスやジャミング転移に伴う集団動力学の発現機構の普遍性についての理解であるが、そこに行き着くまでには多くの問題がある。見方が変われば、直面する問題の種類も変わるであろうが、図1.3のように、少なくとも以下の三つの問題がある。

まず、スピングラス等の不純物のあるスピン模型において、解析技術の発展により平衡状態の相図が明らかになってきている。一方、それらの動力学の知見は、平衡状態のために発展した解析方法がそのままでは適用不可能なためもあって、限られたものになってしまっている。

また、拘束動力学という概念の導入により、動的側面からガラス的動力学の理解をしようという試みがある。近年、拘束動力学系の非エルゴード転移自体に対する知見は広がりつつあるが、転移付近の動力学については確固たる知見は数えるほどしかない。

ガラス系においては、温度を時間とともに変えて行く等の非平衡条件下で、興味深い現象が見られている。このようなガラス系の動力学を理解するためには、非平衡条件下の動力学の理解が必須となってくる。しかしながら、非平衡系における集団動力学の普遍性についても非平衡統計力学が存在しない今、知見は限られたものになってしまっている。

1.2.5 論文で取り組む課題

1.2.4に述べた現状を受け、この論文では、典型的な不純物をもつ多体系、拘束された動力学をもつ多体系、非平衡条件下の多体系における具体的な間欠的集団動力学に焦点を当て、それらの発現機構の普遍性を探索する。また、それらの発現機構を捉えることのできる巨視的量で閉じた数理的表現を見いだす解析方法の構築を行う。つまり、ガラスやジャミング転移に伴う集団動力学の発現機構の普遍性を他のより単純な系で探索を行いな

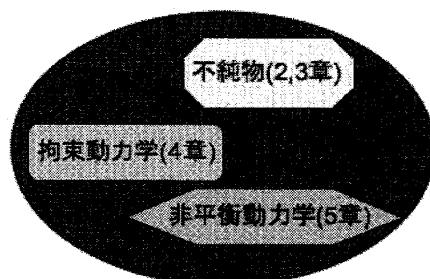


図 1.3: ガラス、ジャミング転移に関わる問題群

がら、将来的には、ガラスやジャミング転移に伴う集団動力学の発現機構を捉えることができる数理的表現を見いだす足場を構築するのである。

具体的には、不純物をもつ単純な系として、希釈ボンド Ising 模型とランダム磁場 Ising 模型の Glauber 動力学に焦点を当てる。現象としては、希釈ボンド Ising 模型の Glauber 動力学においては、不純物の効果により Griffiths 相での緩和が、不純物がない系と本質的に異なることが報告されている。ランダム磁場 Ising 模型においては、ゼロ温度において平衡系の臨界点とは、異なる環境変数（ランダム磁場の分散など）における動力学異常が見いだされている。どちらの現象も、不純物の効果が本質的な現象であると言える。よって、2つの系の集団動力学を捉える数理的表現を見いだしていくことと同時に、不純物がある系に広く実行可能な解析方法を構築していくことが課題となる。

拘束された動力学をもつ単純な系としては、Fredrickson-Andersen (FA) 模型に焦点を当てる。この系は、Bethe 格子上で非エルゴード転移を起こすことが知られていて、そこに向かって、時間と空間尺度が増大して行くことが知られている。この現象も、拘束動力学特有の典型的現象と言える。よって、その機構の理解を進める数理的表現を見いだすことと同時に、拘束された動力学系に広く使える解析方法を構築していくことが課題となる。

単純な非平衡系として興奮型蔵本模型に焦点をあてる。この系では、集団興奮現象が起こる。この興奮現象も非平衡系特有の現象といえる。よって、その機構の理解を進める数理的表現を見いだすことと同時に、非平衡系に広く実行可能な解析方法を構築していくことが課題となる。

また、希釈ボンド Ising 模型は平衡状態への緩和過程であり、ランダム磁場 Ising 模型はゼロ温度の極小エネルギー状態への緩和である。FA 模型は、有限温度で定常状態として平衡状態以外の状態を持つ系である。よって、希釈ボンド Ising 模型、ランダム磁場 Ising 模型、FA 模型、興奮性蔵本模型と並べると、次第に平衡に近く後ろほど非平衡系に近づくという見方もできる。

また主に、スピン模型については主に Bethe 格子上に話題を絞り、蔵本模型については全結合に話をしぼる。このような限定は、常に実際の現象とはかけ離れた模型の「役に立たない」研究になるという危険性を持つ。しかしながら、この限定により得られる知見によって、今まで掴めなかった、ガラスやジャミング転移に伴う集団動力学の発現機構に関する普遍性の尻尾でもつかめれば、目標に向かって一步前進することになるのである。

2章から5章で、上で示した4つの話題で順番に章立てを行い、先行研究の紹介を含め詳細を報告するが、次に簡単に主要結果の要約を行う。

1.3 主要結果の要約

1.3.1 2章の要約

この章では、Bethe 格子上の希釈ボンド Ising 模型の Glauber 動力学を扱う。この系には、ボンドが繋がる確率 p と温度 T による相図があり、低温には Griffiths 相がある [20]。主にこの Griffiths 相の動力学に焦点を当てる。

まず、あるサイトに着目して周りのスピン配置の情報を取り入れた有限個の変数を導入し、それらの変数で閉じた時間発展方程式を近似的に導出した。ちなみにこの方程式の定常状態は厳密である。この方程式を数値的に解くことにより、ボンドパーコレーションが起こっていない Griffiths 相の低温領域では磁化が多段階緩和することがわかった。これは Monte Carlo (MC) シミュレーションとも矛盾がない。また MC シミュレーションが困難な他のいくつかの Bethe 格子の結合数に関しても、導出した時間発展方程式を解くことによって、磁化の多段階緩和が見られることを発見した。さらにこれから、この段階の数は、Bethe 格子の結合数 c そのものであることが示唆された。

先行研究 [21] では、この多段階緩和が起きる領域の動力学の異常性が観測されていたが、その異常性が、実際多段階緩和であることを示したのはこの研究が初めてである。

1.3.2 3章の要約

この章では、Bethe 格子上のランダム磁場 Ising 模型のゼロ温度 Glauber 動力学を扱う。この系には、Gauss 分布するランダム磁場の分散と平均による相図があり、スピノダル線の端点は有限の平均磁場にある [22]。この研究では、初期時刻に全てのスピンが下向きに揃った条件における、スピノダル端点（平衡の特異点でない）付近の動力学に焦点を当てる。

まず、少数自由度で閉じた時間発展方程式を導出するために、あるサイトのスピンを固定した元の系とは異なる系（模擬系）を用意する。次に、その模擬系において、固定したサイトの隣のサイトの上向きスピンの確率に着目する。すると、そのサイトが固定されているため、その変数に関していわゆる Bethe 解析が可能となる。結果、模擬系に対して1変数（秩序変数）で閉じた時間発展方程式を厳密に導出できる。実は、元の系の反転できないスピン密度は、模擬系での秩序変数と1対1の対応関係で結ばれる。これにより、元の系において、反転できないスピン密度で閉じた時間発展方程式を厳密に導出することができる。この方程式を解くことにより、スピノダル線はサドルノード分岐であることがわかり、スピノダル線の端点は2つのサドルノード分岐がぶつかる所であることがわかった。この方程式を端点付近で展開することにより、各種臨界指数を求めることができた。当然、各種臨界指数は MC シミュレーションと矛盾しないことも確認している。

この問題に関する研究は多く存在する [23] が、少数自由度の時間発展方程式を厳密に導出し、時間に関する臨界指数を導出したのは、この研究が初めてである。

1.3.3 4章の要約

この章では、Bethe 格子上の拘束動力学模型 (FA 模型) を取り扱う。この系は温度を変えて行くと、非エルゴード転移が起こることが知られている [24]。このエルゴード転移付近の動力学に焦点を当てる。

まず、2章と同様にあるサイトに着目し、周りのサイトの情報を取り入れた変数を定義し、その変数で閉じた時間発展方程式を近似的に導出する。また、情報を取り入れるサイトを徐々に広げ、それらに関する近似時間発展方程式も導出する。つまり情報を取り入れる距離に関する摂動解析を行う。ちなみに各摂動次数の時間発展方程式は、転移点より高温で正しい定常状態を持つ。摂動次数を上げると、導出した時間発展方程式は系統的に MC シミュレーションに近づいていくことを確認した。また、この複数の方程式の摂動次数に対する移り変わりグラフの手の数 c を考慮し、各摂動次数の力学系の緩和時間が、 c に依存しない普遍的関数に従うことを見いだした。これから動的臨界指数が、拘束動力学が同じであれば、 c に依存しないという強い証拠を得ることができた。

これまでの研究において非エルゴード付近の集団動力学とモード結合方程式との関係性が MC 法により示唆されていた [24, 25]。この研究に依って、この非エルゴード転移の動的普遍性の一側面を、MC 法と異なる方法で見いだすことに初めて成功した。

1.3.4 5章の要約

この章では、全結合の興奮型蔵本模型を取り扱う。この系はノイズ強度と興奮性強度による相図があり、興奮性強度が低い状態で低ノイズにすると、非同期-同期転移が起きる。また、その低ノイズにおいて興奮性の強度をあげると、同期状態から休止状態へ転移する [26]。

この同期-休止転移付近の動力学に着目する。まず、系が同期していることに着目し平均位相だけの 1 体の問題に落とす。その平均位相に対する経路積分を書き下し、振動数固定の最頻過程を Euler-Lagrange 方程式の解として特徴づける。経路積分を、その振動数固定の最頻過程で評価すると、各振動数を取る確率が表すことができる。その確率を使って、平均振動数、分散の興奮性強度依存性を評価できる。具体的には、この 2 つの量は興奮性強度の臨界点からの距離に関してベキ的に振る舞うことがわかり、それらの臨界指数を求めることができた。この臨界指数は、数値計算とも矛盾しないことも確認している。

蔵本模型の同期非同期転移の臨界的性質に関しては数多くの研究があり、それに対応する臨界指数も先行研究で既に導出されている [27] が、同期-休止転移の臨界指数を導出したのはこの研究が初めてである。

1.3.5 この論文の意義と将来の課題

この論文ではまず、ガラス、ジャミング転移の集団動力学を理解して行く上で通らなければならない問題群を分けた。その上で、それぞれの問題群を共有する単純な多体系の集団動力学の発現機構を、捉える数理的表現を見いだすことを試みた。このような研究は、ガラス、ジャミング転移の集団動力学の完全な理解という観点からすると、遠回りに思えるかもしれない。しかしながら、少なくともこの論文で取り組んだ4つの多体系とガラス、ジャミング転移を示す多体系の両者は、解決すべき同種の問題を抱えている。よってその意味において、この論文によって、ガラス、ジャミング転移が抱える諸問題の一部を解決したとも言える。ここで注意したいのは、解決した諸問題が、ガラス、ジャミング転移と本質的に関係があるかどうかは現時点ではわからない。それに答えるためには、さらなる研究が必要である。筆者の感覚としては、当たらずとも遠からずという感触を得ている。6章で、関連する話題について述べる。

方法論の立場からすれば、2章, 3章と4章のような Bethe 格子上の模型、または5章のような全結合系は、低次元の超立方格子上の模型とは異なる普遍性をもつ集団動力学を示すことが予想される。しかしながら現在、Bethe 格子上、全結合系に話をしばっても、集団動力学の数理的取扱は既に非自明な状況である。そのような意味において、集団動力学に対する巨視的量で閉じた数理的表現に関する知見を、少しではあるが着実に広げるという意義もこの博士論文は持っている。この論文で扱った集団動力学が、有限次元系ではどうなるかという問題は、我々の将来の課題として残る。

1.3.6 2章以降を読む際の注

2章以降の研究の位置づけは以上述べた通りであるが、各章は独立に読める形式になっている。また、2章以降に議論する物理量は各章で定義されているが、必ずしも全ての章で同じ表示をとっているわけではないことに注意されたい。

参考文献

- [1] Baxter B. J., *Exactly solved models in Statistical mechanics*, Dover Publications (2008).
- [2] Krauth W., *Statistical mechanics: Algorithm and Computations*, Oxford University (2005).
- [3] Kubo R., *J. Phys. Soc. Jpn* **12** 570 (1957).
- [4] Hayashi K. and Sasa S., *Physica. A* **370** 407 (2006).

- [5] Boksenbojm E., Wynants B. and Jarzynski C., *Lecture Notes in Fundamental Problems in Statistical Physics XII*, arXiv:1002.1230.
- [6] Kurchan J., *Summer School Lecture Notes*, arXiv:0511073.
- [7] Hohenberg P. C. and Halperin B. I., *Rev. Mod. Phys.* **49** 435 (1977).
- [8] Parisi G., *Statistical Field Theory*, Westview Press (1998).
- [9] Kipnis C. and Landim C., *Scaling Limits of Interacting Particles Systems*, Springer-Verlag (1998).
- [10] Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii L. P. and Stringari S., *Rev. Mod. Phys.* **71** 463 (1999).
- [11] Leggett A. J., *Rev. Mod. Phys.* **73** 307 (2001).
- [12] Kuramoto Y., *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Dover Publications (2003).
- [13] Ramaswamy S., *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **1**, 323 (2010).
- [14] Cross M. C. and Hohenberg P. C., *Rev. Mod. Phys.* **65** 851 (1996).
- [15] Bray A. J., *Advances in Physics*, **43** (1994) 357.
- [16] Kaneko K., *Phys. Rev. Lett.* **63** 1029 (1989).
- [17] Cavagna A., *Physics Reports*, **476** 51 (2009).
- [18] Parisi G. and Zamponi F., *Rev. Mod. Phys.* **82** 789 (2010).
- [19] Plenz D. and Thiagarajan T. C., *Trends in Neurosciences* **30** (2007).
- [20] Laumann C. L., Scardicchio A. and Sondhi S. L., *Phys. Rev. E* **77** 061139 (2008).
- [21] Mozeika A. and Coolen A. C. C., *J. Phys. A* **42** (2009).
- [22] Dhar D., Shukla P. and Sethna J. P., *J. Phys. A* **30** (1997).
- [23] Sethna J. P., Dahmen K. A. and Myers C. R., *Nature* **242** (2001).
- [24] Sellitto M., Toninelli C. and Biroli G., *Europhys. Lett.* **69** 496 (2005).
- [25] Pitts S. J., Young T. and Andersen A.C., *J. Chem. Phys.* **113** (2000).
- [26] Shinomoto S. and Kuramoto Y., *Prog. Theor. Phys.* **75** (1986).
- [27] Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez Vicente C. J., Ritort F. and Spigler R., *Rev. Mod. Phys.* **77**, 137 (2005).

第2章 希釈ボンド Ising 模型の Glauber 動力学における集団動力学

2.1 先行研究と研究動機

多体系における不純物の効果を理解することは、統計物理学における中心的課題の一つである。なぜなら、ある種の不純物を持つ多体系における統計的性質は、しばしば不純物がない多体系のものと質的に異なるからである。分配関数のゼロ点 (Lee-Yang ゼロ点) 密度における真性特異点、つまり Griffiths-McCoy 特異性は、そのような典型的な現象である [1, 2, 3].

今までに、Griffiths-McCoy 特異性の平衡統計力学としての性質に対しては、多くの研究がなされている [3, 4]。特に、有限次元系の問題を簡単にするために、Bethe 格子上の模型がその格子に特殊な解析方法によって研究され、それによって、特異性に関する平衡統計力学としての性質の理解は加速した [5, 6, 7, 8]。しかしながら、その豊富な平衡状態に関する知識に比べ、Griffiths-McCoy 特異性に付随する動的性質に関する知識は少ない。但し、長時間極限での異常な動的振る舞いを明らかにした研究はある [9, 10, 11]。このように、長時間極限でない中間時間の動的振る舞いの知識は、Bethe 格子上の模型に関しての先行研究はあるが [12]、確立はしていない。おそらく、このように理解が制限されていることの理由の一つには、動的振る舞いを捉えるための理論的方法の不足がある。

この章では、そのような問題を解決するために、Bethe 格子 (固定された手の数を持つランダムグラフ) 上の希釈ボンド Ising 模型の Glauber 動力学を解析する近似理論を発展させることを試みる。実際、導出された力学系の最終状態は厳密であり、ほとんどの環境条件において時間依存解は MC 法とよい一致を見た。しかしながら、ボンドパーコレーションが起こっている Griffiths-常磁性転移点以下では、両者は食い違いをみせる。この方法から得られた結果により、ボンドパーコレーションが起こっていない Griffiths 相の低温領域の中間時刻において、磁化が多段階緩和を起こすという強い証拠を得ることができる。

この章は次のように構成されている。まず 2 節で模型の定義を行う。3 節において、模型から近似的に力学系の導出を行う。4 節では、導出した力学系の具体的な振る舞いを調べ、MC 法との比較を行う。結びでは、近似法の有効性について議論を行う。付録では、Bethe 格子上の希釈ボンド Ising 模型の平衡状態の性質を扱う。

2.2 模型

ここで $N \in \mathbb{N}$ 個の頂点からなり、それぞれの頂点が $c \in \mathbb{N}$ 個の頂点と無作為に繋がっているランダムグラフを考える。但し、ここで \mathbb{N} は自然数であり、 $G(c, N)$ をそのようなランダムグラフの集合とする。ランダムグラフ $G \in G(c, N)$ のそれぞれの頂点 $i \in \{1, \dots, N\}$ にあるスピン変数 $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ に対して、希釈ボンド Ising 模型は、次のハミルトニアンで定義される。

$$H^J(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \in B_i} J_{ij} \sigma_i \sigma_j. \quad (2.1)$$

ここで B_i は頂点 i につながる頂点の集合であり、また、まとめて $\sigma \equiv (\sigma_i)_{i=1}^N$ 、 $J \equiv (J_{ij})_{i,j=1}^N$ と表すことにする。ボンド変数 $J_{ij} (= J_{ji})$ は次の確率で与えられる。各 $j \in B_i$ に対して、

$$D(J_{ij}) = p\delta(J_{ij} - 1) + (1 - p)\delta(J_{ij}), \quad (2.2)$$

それ以外で $J_{ij} = 0$ である。 X という量の希釈ボンドに関する平均は、 \bar{X} と表すことにする。次に、希釈ボンド Ising 模型の動力学を導入する。まず、 $T^J(\sigma \rightarrow F_i \sigma)$ を、状態 σ から $F_i \sigma$ への遷移率とし、詳細釣り合いを満たすとする。ここで、 F_i は頂点 i に対するスピン反転演算子で、 $F_i \sigma = (\sigma_1, \dots, -\sigma_i, \dots, \sigma_N)$ である。 J というボンド変数の下で、時間 t において、スピン配置が σ である確率 $P^J(\sigma, t)$ に関するマスター方程式は、次である。

$$\partial_t P^J(\sigma, t) = \sum_{i=1}^N [T^J(F_i \sigma \rightarrow \sigma) P^J(F_i \sigma, t) - T^J(\sigma \rightarrow F_i \sigma) P^J(\sigma, t)]. \quad (2.3)$$

この章では、次の遷移率を採用する。

$$T^J(\sigma \rightarrow F_i \sigma) = \frac{1}{2} [1 - \tanh((H^J(F_i \sigma) - H^J(\sigma))/2T)]. \quad (2.4)$$

ここで、 T は温度である。

ここでは、短く Griffiths-McCoy 特異性の平衡統計力学としての性質を振り返る。 $Z(\theta)$ を純虚な外場 θ に対する分配関数とする。熱力学極限で虚軸の分配関数の零点の密度が、 $|\theta| \rightarrow 0$ で $\exp(-A(p, T)/|\theta|)$ のような真性特異点をもつことを、Griffiths-McCoy 特異性という。 $A(p, T)$ は (p, T) に依存する定数である。ここで注意すべきことは、そのような特異性が起こる環境変数の値においては、 $\theta = 0$ の平衡磁化は、依然として 0 である。Griffiths 相は、図 2.1 に示したとおりである。強磁性相に関する相境界は、2.6 節の付録 A による議論によって得られる。但し、常磁性相に関する相境界は、付録 A の議論では得られない。Griffiths-McCoy 特異性に関してより詳しくは、[8] を参考にされたい。単純に言って、Griffiths-McCoy 特異性は、まれにできる大きな秩序領域に起因する。この研究の主な目的は、その特異性に付随する変則的な動的振る舞いを理解することである。次の節から、そのような振る舞いを理解する近似理論を構成していくが、その前にこれまで知られた動的性質についてまとめてみる。

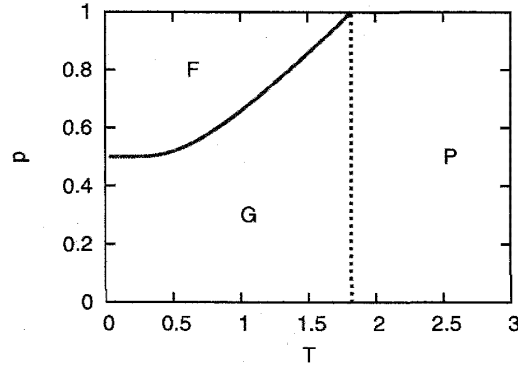


図 2.1: $c = 3$ の相図: F, P, G がそれぞれ強磁性相、常磁性相、Griffiths 相を示す。(注) [H. Ohta, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** 395003 (2010)] からの引用であり、この章の他のすべての図も同論文からの引用である。

まず、 d 次元格子の模型における Griffiths 相での動的性質に関しては、次の 2 点がわかっている。まず、ボンドパーコレーションが起こっている Griffiths 相においては、スピンの自己相関関数が、長時間極限で時間の関数として指数形より遅い非指数形の緩和を示すことが知られている [10]。また、ボンドパーコレーションが起こっていない Griffiths 相では、長時間極限で指数緩和であることが知られている [11]。Bethe 格子上の模型に関しては、詳しいことは知られていないが、 d 次元格子と同じような振る舞いをすることが予想される。よって、この予想の確認は一つの研究目的となり得るが、序論でも述べたように、長時間極限でない中間時間での動的性質の理解がこの章の主な研究目的である。

2.3 有効力学系の導出

原理的に、マスター方程式 (2.3) は系についての完全な情報を持っている。しかしながら、この方程式から有用な情報を得ることは難しい。なぜなら、系の状態数は 2^N であり、 N が大きい時非常に大きくなる。おまけに、不純物としての希釈ボンドの存在に依って、系の解析は複雑化する。ここで、Bethe 格子上の系の平衡状態の性質を理解するために構成されたある有用な理論的方法を思い出してみよう [13]。この方法は、直接的にそのような大きな自由度を扱うことはない。この方法の有効性に習って、系の動的振る舞いに関する有用な情報を手に入れるために、有限の数 $N_{\text{eff}} \in O(N^0)$ の変数で系を記述することを試みる。しかしながら、一般に平衡の性質から動的性質へ厳密な解析を拡張することはすぐにはできない。実際、いくつかの研究において、縮約された自由度に関する厳密な時間発展方程式の導出に成功している [14, 15, 16, 17, 18, 19] が、各々の方法は、各々の方法特有の問題を持っている。それにより、現在の問題の動的振る舞いに関して厳密に有用な情報を得ることは難しい。そこで、今の問題で有用な情報を得るために、他の方法を考えなければならないが、ある先行研究が参考になる [20]。その研究に依ると、強磁性 Ising 模型において、平衡状態の厳密性を保ちつつ、少数自由度による動的振る舞いの近似表現を得ることができている。よってここからは、この研究の結果を下にして、Bethe 格子上の不純物を扱う近似理論を発展させることを試みる。

最初に準備として、 $J_{ij} = 1$ である頂点 $j \in B_i$ を、頂点 i に結合した頂点と呼び、 $J_{ij} = 0$ である頂点 $j \in B_i$ を、頂点 i に結合していない頂点と呼ぶ。頂点 i に結合した頂点の数 $l_i \in \{0, \dots, c\}$ は、

$$l_i = \sum_{j \in B_i} J_{ij} \quad (2.5)$$

によって決まる。 $u_i \in \{0, \dots, l_i\}$ を、頂点 i に結合した頂点における下向きスピンの数としよう。そのとき、頂点 i は、変数の集合 (σ_i, u_i, l_i) で特徴づけられたことになる。これらの変数を使って、 $T^J(\sigma \rightarrow F_i \sigma)$ は $r_{\sigma_i}(l_i, u_i)$ として表せる。但し、 $r_{\sigma}(l, u) \equiv (1 - \tanh(\sigma(l - 2u)/T))/2$ である。ここで注意すべきことは、 σ_i と u_i は時間 t に依存し、一方 l_i は時間 t に依存しない。次に、時刻 t において、ボンド変数が J の時に、 $P_i^J(\sigma, u; t)$ を、 (σ_i, u_i) が (σ, u) である確率とし、 $P_{ij}^J((\sigma, u), (\sigma', u'); t)$ を、 (σ_i, u_i) と (σ_j, u_j) が、それぞれ (σ, u) で (σ', u') である確率とする。これらの確率を使って、次の条件付き確率を定義する。 $P_{ij}^J(\sigma, u | \sigma', u'; t) \equiv P_{ij}^J((\sigma, u), (\sigma', u'); t) / P_j^J(\sigma', u'; t)$ 。以下の解析では、 N は十分大きいとし、グラフ $G \in G(c, N)$ を固定し、 $G(c, N)$ という集合についての考察は行わない。つまり、以下の解析は熱力学極限で、ほとんど全てのグラフ $G \in G(c, N)$ について適用可能であるということである。

これらの記号の下で、次の厳密な表示から解析を始める。

$$\begin{aligned} \partial_t P_i^J(\sigma, u; t) &= -r_{\sigma}(u, l_i) P_i^J(\sigma, u; t) + r_{-\sigma}(u, l_i) P_i^J(-\sigma, u; t) \\ &+ \sum_{j \in B_i} \sum_{\sigma'} \sum_{u_j=0}^{l_j} r_{\sigma'}(u_j, l_j) P_j^J(\sigma', u_j; t) \delta(J_{ij} - 1) \\ &\quad [P_{ij}^J(\sigma, u + \sigma' | \sigma', u_j; t) - P_{ij}^J(\sigma, u | \sigma', u_j; t)]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここでランダムグラフ G の輪の長さの次数は $O(\log N)$ であり、3 より大きいことを使っている。また、整合性を保ちつつ表現を簡潔にするために、 $P^J(\sigma, u | \sigma', c+1; t) = P^J(\sigma, u | \sigma', -1; t) \equiv 0$ と定義を変えた。次に、方程式 (2.6) の両辺に $\delta(\sum_{j \in B_i} J_{ij} - l)$ をかけて、希釈ボンドに関する平均を行う。ここで、次の量を定義する。

$$P_i(\sigma, l, u; t) \equiv \overline{\delta(\sum_{j \in B_i} J_{ij} - l) P_i^J(\sigma, u; t)}, \quad (2.7)$$

$$P_{ij}(\sigma, l, u | \sigma', l', u'; t) \equiv \frac{P_{ij}^J(\sigma, l, u | \sigma', l', u'; t)}{\delta(J_{ij} - 1) \delta(\sum_{k \in B_i} J_{ik} - l) \delta(\sum_{k' \in B_j} J_{jk'} - l') P_{ij}^J(\sigma, u | \sigma', u'; t)}, \quad (2.8)$$

$$P_j^i(\sigma, l, u; t) \equiv \overline{\delta(J_{ij} - 1) \delta(\sum_{j \in B_i} J_{ij} - l) P_i^J(\sigma, u; t)}. \quad (2.9)$$

そのとき、次のような表示が得られる。

$$\begin{aligned} \partial_t P_i(\sigma, l, u; t) &= -r_{\sigma}(l, u) P_i(\sigma, l, u; t) + r_{-\sigma}(l, u) P_i(-\sigma, l, u; t) \\ &+ \sum_{j \in B_i} \sum_{\sigma'} \sum_{u' \leq l'} r_{\sigma'}(l', u') P_j^i(\sigma', l', u'; t) \\ &\quad [P_{ij}(\sigma, l, u + \sigma' | \sigma', l', u'; t) - P_{ij}(\sigma, l, u | \sigma', l', u'; t)]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

ここで $\sum_{u' \leq l'} \equiv \sum_{l'=0}^c \sum_{u'=0}^{l'}$ である。方程式 (2.6) から (2.10) の導出の鍵となる恒等式は次である。

$$\overline{A_i} = \sum_{l'=0}^c \overline{\delta(\sum_{j \in B_i} J_{ij} - l') A_i}, \quad (2.11)$$

$$\overline{\delta(a) X(a) Y(a) / Z(a)} = \overline{\delta(a) X(a)} \frac{\overline{\delta(a) Y(a)}}{\overline{\delta(a) Z(a)}}. \quad (2.12)$$

ここから、熱力学極限において、 $P_j^i(\sigma', l', u'; t)$ と $P_{ij}(\sigma, l, u | \sigma', l', u'; t)$ の値が、選ばれた結合した頂点 i, j に依存しないということを仮定する。少なくとも、この問題においては、ランダムグラフ G の輪起因の系の非一様性は、熱力学極限で無視できるであろうから、この仮定はもっともらしいと言えよう。この仮定は、 $P_{ij}(\sigma, l, u | \sigma', l', u'; t)$ が次の条件付き確率 $P_B(\sigma, l, u | \sigma', l', u'; t)$ と同じであることと同等である。その条件付き確率は、もし (σ, l, u) で特徴づけられた頂点が無作為に選ばれた際に、その頂点に結合した頂点をさらに無作為に選び、その2つ目に選ばれた頂点が (σ, l, u) で特徴づけられている確率である。また、上記の仮定の下では、 $P_j^i(\sigma', l', u'; t)$ は $(l'/c) P_j(\sigma', l', u'; t)$ と等しい。ここで、 $P_B^\sigma(l, u | \sigma', l', u'; t)$ を次のように定義する。

$$P_B^\sigma(l, u | \sigma', l', u'; t) \equiv \frac{P_B(\sigma, l, u | \sigma', l', u'; t)}{P_B(\sigma | \sigma', l', u'; t)}. \quad (2.13)$$

ここで $P_B(\sigma | \sigma', l', u'; t)$ は $P_B(\sigma, l, u | \sigma', l', u'; t)$ と同様に定義される。また、次の関係を得ることができる。

$$P_B(\sigma | \sigma', l', u'; t) = \frac{C_\sigma(l', u')}{l'}, \quad (2.14)$$

$$C_\sigma(l', u') = \begin{cases} l' - u' & (\sigma = 1) \\ u' & (\sigma = -1). \end{cases} \quad (2.15)$$

自明な関係 ($\sum_{j \in B_i} = c$) と上述の手続きにより、力学系 (2.10) は次のように簡単化される。

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{\sigma, l, u}(t) &= -r_\sigma(l, u) \rho_{\sigma, l, u}(t) + r_{-\sigma}(l, u) \rho_{-\sigma, l, u}(t) \\ &\quad + \sum_{\sigma'} \sum_{u' \leq l'} r_{\sigma'}(l', u') \rho_{\sigma', l', u'}(t) C_\sigma(l', u') \\ &\quad [P_B^\sigma(l, u + \sigma' | \sigma', l', u'; t) - P_B^\sigma(l, u | \sigma', l', u'; t)]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

ここで $\rho_{\sigma, u, l}(t) \equiv \sum_{i=1}^N P_i(\sigma, u, l; t) / N$ である。また $\rho_{\sigma, u, l}(t)$ は、熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ で、 $\sum_{i=1}^N \delta(\sigma - \sigma_i(t)) \delta(u - u_i(t)) \delta(l - l_i(t)) / N$ と同等であることは、もっともらしいと言えよう。現時点では、方程式 (2.16) は、 $\rho \equiv (\rho_{\sigma, l, u})$ に関して閉じていない。

次に、閉じた方程式を得るために、(2.16) について次のような近似を行う。

$$P_B^\sigma(l, u | \sigma', l', u'; t) = P_B^\sigma(l, u | \sigma'; t). \quad (2.17)$$

スピン変数が σ' である結合した頂点の数を考慮することにより、 $P_B^\sigma(l, u | \sigma'; t)$ は ρ を用いて、次のように書き下すことができる。

$$P_B^\sigma(l, u | \sigma'; t) = \begin{cases} (l - u) \rho_{\sigma, l, u}(t) / \sum_{u' \leq l'} \rho_{\sigma, l', u'}(t) & (\sigma' = +1) \\ u \rho_{\sigma, l, u}(t) / \sum_{u' \leq l'} u' \rho_{\sigma, l', u'}(t) & (\sigma' = -1). \end{cases} \quad (2.18)$$

(2.17) の近似と (2.16) により, ρ に関する閉じた方程式を得ることができた。つまり、

$$\partial_t \rho = G(\rho) \quad (2.19)$$

で、但し $G = (G_{\sigma,l,u})$ であり、 $G_{\sigma,l,u}$ は (2.16) の右辺と (2.17) の近似表現と関係式 (2.18) で表される。この段階で、系を記述する変数の数は、 2^N から $N_{\text{eff}} = (c+1)(c+2)/2$ とできたことになる。

近似 (2.17) の妥当性を確かめるために、まず、 $G(\rho_{\text{eq}}) = 0$ を満たす定常状態 ρ_{eq} を考える。それから $\rho(t_{\text{st}}) = \rho_{\text{eq}}$ に対して、緩和時間 $t_{\text{eq}} \equiv \min t_{\text{st}}$ を定義しよう。

$$P_B^g(l, u | \sigma', l', u'; t) = \frac{P_B((\sigma', l', u'), (\sigma, l, u); t)}{\sum_{u'' \leq l''} P_B((\sigma', l', u'), (\sigma, l'', u''); t)} \quad (2.20)$$

と書き直し、但し、

$$P_B((\sigma, l, u), (\sigma', l', u'); t) \equiv \frac{P_B((\sigma, l, u), (\sigma', l', u'); t)}{\delta(J_{ij} - 1) \delta(\sum_{k \in B_i} J_{ik} - l) \delta(\sum_{k' \in B_j} J_{jk'} - l') P_{ij}^J((\sigma, u), (\sigma', u'); t)} \quad (2.21)$$

であり、 $P_B((\sigma, l, u), (\sigma', l', u'); t)$ の値は選ばれた結合した頂点 i, j によらないと仮定する。すると、(2.18), (2.36) と (2.37) によって、平衡状態 $t \geq t_{\text{eq}}$ において、 $P_B^g(l, u | \sigma', l', u'; t) = P_B^g(l, u | \sigma'; t)$ が成り立つことがわかる。(2.36) と (2.37) の導出の詳細は、2.7 節の付録 B を参照されたい。つまり、平衡状態 $t \geq t_{\text{eq}}$ においては、近似 (2.17) は恒等式となる。

ここで注意すべきことは、もし時刻 $t = 0$ でスピン変数が σ と与えられると、 $\rho(0)$ は自動的に決定されることである。つまり、 $m(0) = 1$ の場合は、 $\rho(0)$ は次のように与えられる。

$$\rho_{+1,l,0}(0) = \binom{c}{l} p^l (1-p)^{c-l}, \quad (2.22)$$

$$\rho_{-1,l,0}(0) = 0, \quad (2.23)$$

$$\rho_{\sigma,l,u \neq 0}(0) = 0. \quad (2.24)$$

磁化 $m \equiv \sum_i \sigma_i / N$ とエネルギー密度 $e \equiv H(\sigma) / N$ は、 ρ を用いて次のように表されることに言及しておく。

$$m = \sum_{\sigma} \sum_{u \leq l} \sigma \rho_{\sigma,l,u}, \quad (2.25)$$

$$e = - \sum_{\sigma} \sum_{u \leq l} \sigma (l - 2u) \rho_{\sigma,l,u}. \quad (2.26)$$

近似から誘導される予想

$m(0) = 1$ の初期状態からの緩和過程に対する、近似 (2.17) の性質について考えてみよう。ここで m と τ を、熱力学極限での系の磁化と緩和時間とする。また、 m_d と τ_d を、力学系 (2.19) の解で記述される磁化と緩和時間とする。近似の範囲では、2 個の頂点分より

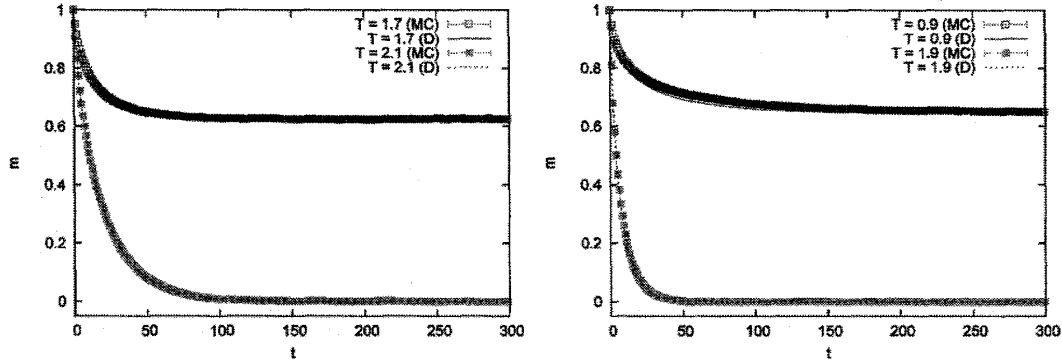


図 2.2: 初期条件 $m(0) = 1$ の下での、(2.19) で記述される時間依存磁化と MC 法。(左) $p = 1$ (右) $p = 0.7$ 。図中で、MC は、MC 法を示す、D は力学系 (2.19) を示す。

遠い 2 つの頂点間の相関を無視している。しかしながら、そのような相関はある緩和時間を持っている。これにより、緩和時間 τ に対して、 $\tau_d \leq \tau$ のような下限が与えられるという予想ができる。これは、 $m(0) = 1$ という条件の下で、任意の t に対して、 $m_d(t) \leq m(t)$ が成り立つという予想も導く。強磁性相互作用の Ising 模型において、遠い頂点の効果まで取り入れた系統的研究によっても、部分的にこの予想は支持されている [20]。将来的に、この予想に対する厳密な証明を与えることは重要な課題であろう。

2.4 力学系 (2.19) の時間依存解

導出された力学系の時間依存解を、詳細に見ていく。固定された環境変数 (p, T) 、初期条件 $m(0) = 1$ からの系の緩和過程を考える。具体的には、時間刻み $\delta t = 10^{-2}$ で、4 次の Runge-Kutta 法を用いて、(2.19) を数値的に解く。この論文では主に、 $c = 3$ を調べる。実際、 $c \geq 3$ の系は、定性的には $c = 3$ の系と同じような振る舞いをみせる。 $c = 2$ の系には 1 次元系と同じで、相転移は起こらない。

この節は次のように構成されている。2.4.1 節では、 $p = 1$ 、つまり強磁性 Ising 模型極限に焦点をあて、結果が先行研究と矛盾しないことを確かめる。2.4.2 節では、 $p > p_c$ の強磁性相と常磁性相に焦点をあてる。2.4.3 節では、 $p > p_c$ の Griffiths 相に焦点をあて、MC 法と力学系の不一致を見ていく。2.4.4 節では、 $p < p_c$ の Griffiths 相に焦点をあて、磁化についての多段階緩和の振る舞いを見ていく。ちなみに、MC 法には次の動的規則を適用する。最初に、一つの頂点、 i 、を無作為に選ぶ。それから、スピン変数 σ_i は、確率 $T^J(\sigma \rightarrow F_i \sigma)$ で反転する。この行程を繰り返し、時間 $t = 1$ は N 回の行程で定義される。この動的規則は、熱力学極限で、系の動力学と同等である。全ての MC 計算において、系のサイズ N は 10^6 であり、統計平均のための標本数は 10 である。ここで、それぞれの標本は異なる J と $G \in G(c, N)$ を持つ。

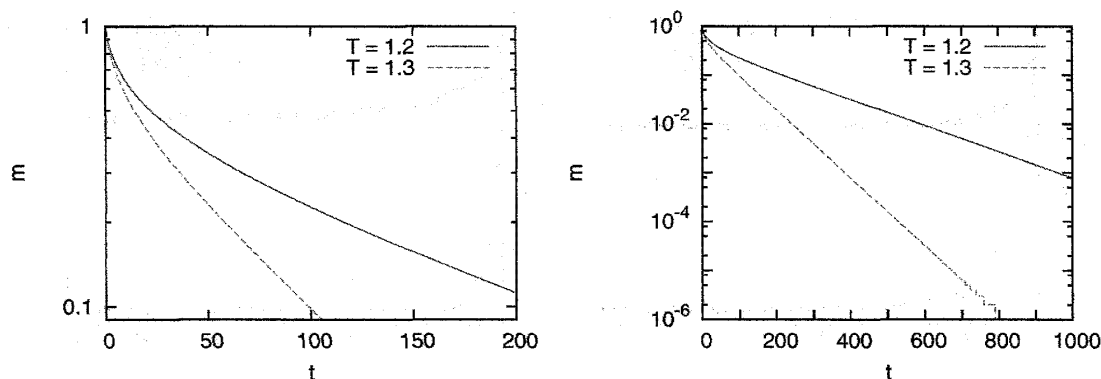


図 2.3: 初期条件 $m(0) = 1$ における温度 $T = 1.2, 1.3$ の Griffiths 相での力学系 (2.19) で記述される時間依存解。 $c = 3, p = 0.7$ 。

2.4.1 強磁性 Ising 極限

$p = 1$ の力学系 (2.19) は、先行研究で提案された近似法 ‘Independent-neighbor approximation’ で導出された力学系と同じである [20]。その研究によると、この力学系は、 $T_G(1)$ での動的臨界現象の臨界指数を捉えることができる。例えば、導出された力学系から系の緩和時間 τ が、 $\tau \simeq \epsilon_{\pm}^{-\zeta} (\zeta = 1)$ となることがわかる。但し、 $\epsilon_{\pm} \equiv \pm(T - T_G(p))$ である。図 2.2 左において、(2.19) で記述される時間依存磁化の 2 つの例を、MC 法と共に表示した。(2.19) と MC 法との一致の度合いは、かなり良いことがわかる。

2.4.2 強磁性相と常磁性相

ここで、 $p = 0.7$ の振る舞いを見てみる。図 2.2 右において、(2.19) で記述される時間依存磁化の 2 つの例を、MC 法と共に表示した。 $T = 0.9$ の強磁性相において、2 つの結果にわずかな不一致が見られるが、(2.19) と MC 法との一致の度合いは、かなり良いことがわかる。ここで観測された不一致については、結びの節で議論する。

2.4.3 ボンドパーコレーションが起こっている Griffiths 相

続いて $p = 0.7$ の振る舞いを見ていく。図 2.3 に見られるように、中間時間領域で磁化の緩和形は、時間の関数として非指数的に見える。しかしながら、長時間極限で指数である。実際、非指数緩和の兆候は図 2.4 で表示したように MC 法でも見られる。これが意味するのは、この論文の解析で用いられた近似が、長時間極限の変則的振る舞いを捉えることができないということである。しかしながら、中間領域までは近似はよいとも言える。結びの節において、使われた近似の有効性について議論を行う。ここで注意しておきたいことは、そのような遅い緩和の存在は d 次元格子において厳密に示されている [10]。しかしながら、著者の知る限り、Bethe 格子上の模型に関しては、そのような主張に対しての厳密な証明はない。

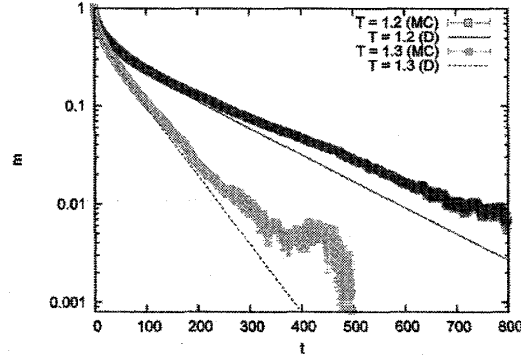


図 2.4: 初期条件 $m(0) = 1$ における温度 $T = 1.2, 1.3$ の Griffiths 相での力学系 (2.19) で記述される時間依存解と MC 法。 $c = 3, p = 0.7$ 。

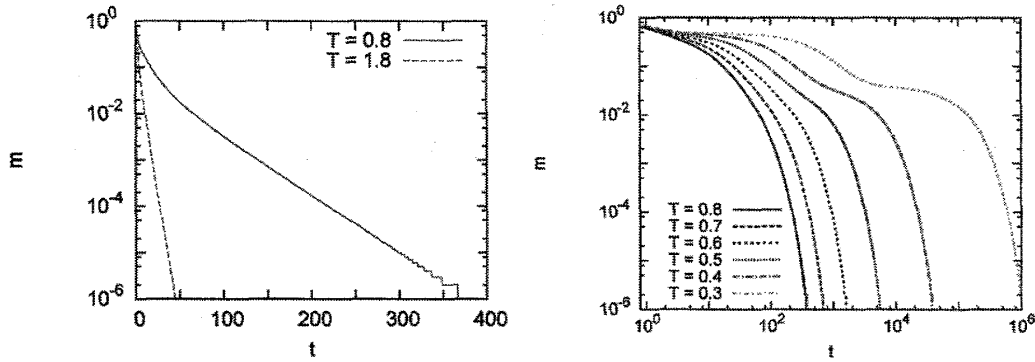


図 2.5: 初期条件 $m(0) = 1$ の下での力学系 (2.19) で記述される時間依存磁化。 $c = 3, p = 1/5$ 。

2.4.4 ボンドパーコレーションが起こっていない Griffiths 相

次に $p = 0.2$ の場合に焦点を当てる。図 2.5 左で見られるように、転移点 $T_G(1)$ の近くでは、磁化の緩和形は広い領域で指数形である。温度を $T = 0.6$ 付近に下げて行くと、驚くべきことにそのような振る舞いとは異なり、図 2.5 右に見られるように、磁化は多段階緩和を示すことがわかる。ここで、厳密には I 段階という言葉は、 $\partial^2(\log m)/\partial(\log t)^2|_{t=t_j} = 0$ という時間 t_j ($j \in \{1, \dots, I\}$) がある時に使うことにする。この意味で、 $c = 3$ の場合には 3 段階緩和が起きる。

この観測は、次の項が (2.19) にあることと関係することが予想される。

$$\partial_t \rho_{+1,c-i,0}(t) = -r_{+1}(c-i, 0) \rho_{+1,c-i,0}(t) + A(\rho(t)). \quad (2.27)$$

ここで $i \in \{0, \dots, c\}$ であり、 $A(\rho(t))$ は $\rho(t)$ の関数である。つまり、 $A(\rho(t))$ の $\rho_{+1,c-i,0}(t)$ 依存性を無視すれば、それぞれの変数は異なる緩和時間 $\tau_i \simeq r_{+1}(c-i, 0)^{-1}$ を持つことになる。但し、その緩和時間は $\exp((c-i)/T)$ ($T \ll 1$) である。実際、図 2.6 で見られるように、それぞれの緩和時間 τ_i は、磁化の緩和形の変曲点ととても近い。これから $c+1$ 個の緩和時間が、 c 個の変曲点を導くという予想が立てられる。 $c = 4, 5, 6$ の場合でも、(2.19)

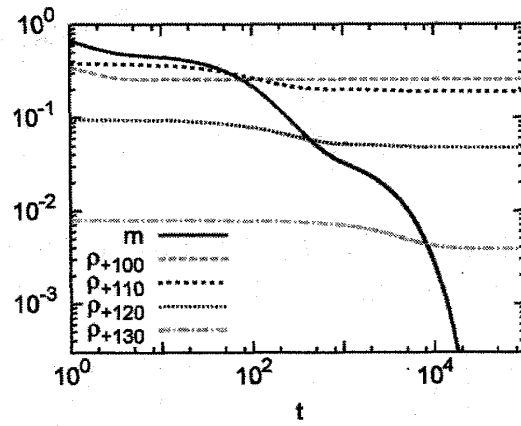


図 2.6: 初期条件 $m(0) = 1$ の下での、力学系 (2.19) で記述されるそれぞれの量。 $T = 0.4$, $c = 3$, $p = 1/5$ 。

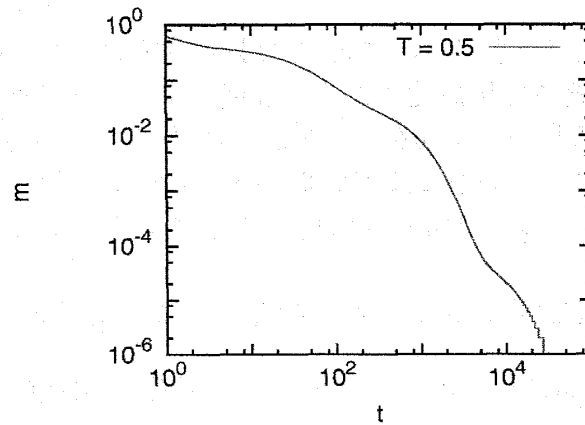


図 2.7: 初期条件 $m(0) = 1$ の下での (2.19) で記述される時間依存磁化。 $c = 5$, $p = 1/10$ 。

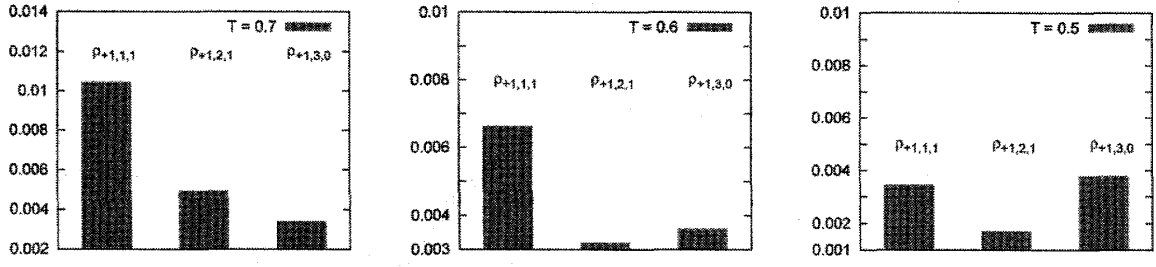


図 2.8: 温度 T に依存する $\rho_{+1,1,1}(t_{eq})$, $\rho_{+1,2,1}(t_{eq})$ と $\rho_{+1,3,0}(t_{eq})$ 。 $c = 3$, $p = 1/5$ 。

において c 段階緩和が起こることを確かめた。図 2.7 において, $c = 5$ の場合での 5 段階緩和を表示した。

しかしながら、この考察だけでは磁化の多段階緩和の機構について、理解したことにはならない。なぜなら、「何が多段階緩和が起こり始める閾値温度 T_{th} を決めているのか」を理解していないからである。おそらく、多段階緩和の出現に関して鍵となる事実は、それぞれの量の相対率、例えば $\rho_{+1,1,1}(t_{eq})$, $\rho_{+1,2,1}(t_{eq})$, $\rho_{+1,3,0}(t_{eq})$ が温度の関数として T_{th} 付近で、図 2.8 のように定性的に変化することであろうと思われる。具体的には、温度が下がると、 $\rho_{+1,3,0}(t_{eq})$ が次のように増加していく。つまり高温領域では $\rho_{+1,1,1}(t_{eq}) > \rho_{+1,2,1}(t_{eq}) > \rho_{+1,3,0}(t_{eq})$ であり、 $T_{th} \simeq 0.6$ 付近では $\rho_{+1,1,1}(t_{eq}) > \rho_{+1,3,0}(t_{eq}) > \rho_{+1,2,1}(t_{eq})$ であり、低温領域では $\rho_{+1,3,0}(t_{eq}) > \rho_{+1,1,1}(t_{eq}) > \rho_{+1,2,1}(t_{eq})$ である。これから、相対率の定性的変化により、それぞれの緩和時間 τ_i が磁化の中に多段階緩和として視覚化されると予想できる。 $c = 4, 5, 6$ の場合には、 p , c に依存する $T_{th}(p, c)$ 付近において、 $c = 3$ の場合と似たような相対率変化が確認された。そのような観測が得られてはいるが、どのように相対率の変化が多段階緩和と関係しているか依然として理解してはいない。将来、それを明らかにするための研究を行うつもりである。また、直接力学系 (2.19) を理論的に解析することによって、多段階緩和の機構を理解するのも興味深いかもしれない。

図 2.9 において、(2.19) で記述される時間依存磁化の 2 つの例と MC 法の結果を表示した。MC 法との一致は、多段階緩和が起きていてもかなり良いことがわかる。この結果は、 $c = 5$ においても、真の磁化が、図 2.7 の (2.19) で記述される磁化のように、多段階緩和を示すことを強く支持する。この環境変数の領域では、そのような振る舞いが起こるかどうかわかる MC 法で確かめるのは難しい。最後に、たとえ多段階緩和が起こるとしても長時間極限での磁化の緩和形は、(2.27) の形を考慮に入れば、指数形であることが示唆されることに触れておきたい。ここで注意すべきことは、そのような指数形は d 次元系格子で厳密に証明されている [11]。しかしながら、著者の知る限りでは、Bethe 格子上の系に関してはそのような主張に関する厳密な証明はない。

2.5 結び

この節では、この研究に関連する他の研究に言及する。今までに、先行研究 [20] の拡張として、動的レプリカ法 (DRT) が、不純物をもつ Bethe 格子上の系を解析するために発

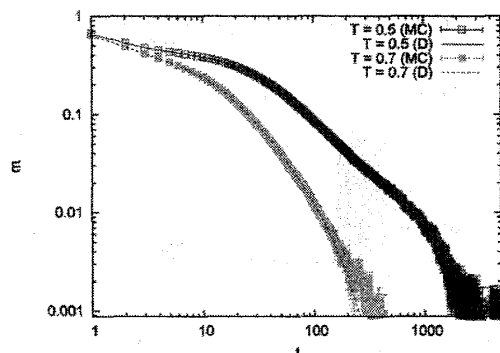


図 2.9: 初期条件 $m(0) = 1$ の下での力学系 (2.19) で記述される時間依存磁化と MC 法。
 $c = 3, p = 1/5$ 。

展させられた [12, 21]。希釈ボンド Ising 模型に対しては、動的レプリカ法によって、系の緩和が定性的に変化する特別な温度の存在と、そこでのいくつかのスピン-場分布の相対率の定性的変化が明らかにされている [12]。しかしながら、その特別な温度以下の緩和の具体形は明確化していなかった [12]。この章の解析は、この現象の理解を前に進めたことになる。つまり、この章の解析により、上述の特別な温度以下で、磁化は多段階緩和を示すことを明らかにしたことになる。この章の解析と DRT は相補的となり得るので、2つの関係を明らかにすることは重要な将来の課題といえる。

この章を終える前に、解析で使われた近似の妥当性を議論したい。まず、使われた近似は、Bethe 格子上の拘束動力学模型の変則的な緩和過程も捉えることができない。その系には、動力学拘束により秩序化された、非一様なスピン配置がある [22]。それゆえ、ボンドパーコレーションが起こっている Griffiths 相-常磁性相転移温度下の変則的な緩和過程を記述できないのは、緩和過程における何らかの非一様なスピン配置に依るものだと予想できる。それは、おそらく稀な大きな秩序化領域と関係するだろう。ここで注意したいのは、このような欠落があるにも関わらず、有効変数として考慮する頂点の周りの領域を広くしていくことによって、徐々により真の系に近い力学系を得ることができることが先行研究から明らかになっていることである [20, 22]。それゆえ、原理的には、そのような作業を行うことによって、2.4.3 節で見られた非指数緩和が観測される時間領域を、延ばすことができるであろう。但し、そのような解析はとても複雑になってしまう。最後に、ランダムグラフの非一様性に関連した仮定と使われた近似が、どのようにレプリカ対称性が破れた系で機能するかを理解することが、次の問題として挙げられることに言及しておく。

2.6 付録 A: 臨界温度 $T_G(p)$

長さ $O(\log N)$ の輪を無視した時、ランダムグラフ $G \in G(c, N)$ と同じ構造を持つ Cayley 木を考えよう。ここで、Cayley 木の世代を $g \in \{0, 1, \dots, g_{\max}\}$ で表し、 $g = 0$ は根に割り当てる。 $(g-1)$ 世代のある頂点に関して、 g 世代のある頂点に繋がったボンドに整数 $j_g \in \{1, \dots, c-1\}$ を割り当てる。こうして、Cayley 木の g 世代の任意の頂点は、整数の集

合 $\mathbf{j}_g \equiv (j_g, \dots, j_1, 0)$ で指定される。 $C(\mathbf{j}_g)$ を $\{(i_{g_{\max}}, \dots, i_{g+1}, \mathbf{j}_g) | 1 \leq i_k \leq c-1, g+1 \leq k \leq g_{\max}\}$ で定義される頂点の集合としよう。但し $(i, k, \mathbf{j}_g) \equiv (i, k, j_g, \dots, j_1, 0)$ である。 $C(\mathbf{j}_g)$ の頂点は、 \mathbf{j}_g を根とした際の Cayley 木 $T_{\mathbf{j}_g}^{j_g-1}$ 上の頂点と見なせる。ここで、あるボンド変数 \mathbf{J} に対して、分配関数 $Z_{\mathbf{j}_g}^{\mathbf{J}}(\sigma) \equiv \sum_{i \in C(\mathbf{j}_g)} \sum_{\sigma_i} \delta(\sigma_{\mathbf{j}_g} - \sigma) \exp(-\beta H^{\mathbf{J}}((\sigma_i)_{i \in C(\mathbf{j}_g)}))$ を考えてみよう。但し $\beta \equiv 1/T$ である。さらに、 $\exp(\beta 2h_{\mathbf{j}_g}^{\mathbf{J}}) \equiv Z_{\mathbf{j}_g}^{\mathbf{J}}(-1)/Z_{\mathbf{j}_g}^{\mathbf{J}}(1)$ を定義する。その時、 $Q_{\mathbf{j}_g}(h) \equiv \overline{\delta(h - h_{\mathbf{j}_g}^{\mathbf{J}})}$ に関する漸化式が以下のように得られる。

$$Q_{\mathbf{j}_g}(h) = H([Q_{\mathbf{j}_{g+1}}(h)]), \quad (2.28)$$

$$H([Q(h)]) = \int dh_i Q(h_i) \delta(h - \sum_{i=1}^{c-1} u(J_{(i, \mathbf{j}_g), \mathbf{j}_g}, h_i)). \quad (2.29)$$

但し $u(J, h) = \beta^{-1} \tanh^{-1}[\tanh(\beta J) \tanh(\beta h)]$ 。

注意すべきことは、初期条件 $Q_{\mathbf{j}_g}(h)$ ($g = g_{\max}$) において、漸化式 (2.28) を解くことに依って、任意の \mathbf{j}_g ($g \ll g_{\max}$) に対する $Q_{\mathbf{j}_g}(h)$ は 次の式を満たす $Q(h)$ になる。

$$Q(h) = H([Q(h)]). \quad (2.30)$$

先行研究 [8] に依れば、十分高温領域において、解 $Q(h)$ は $\delta(h)$ である。温度 T を十分高温から下げていく時、ある固定した p に対して、臨界温度 $T_G(p)$ を得ることができる。その臨界温度は、点 $h_{\mathbf{j}_g} (\equiv \int dh Q_{\mathbf{j}_g}(h)h) = 0$ が、(2.28) から導かれる $h_{\mathbf{j}_g}$ と $h_{\mathbf{j}_{g+1}}$ の間の漸化式において、線形安定性を失う温度で定義される。これから、 $1/T_G(p) = \tanh^{-1}(p_c/p)$ を得ることができる。但し、 $p_c = 1/(c-1)$ はボンドパーコレーション問題の閾値である。つまり、 $p > p_c$ の系ではボンドパーコレーションの固まりがあり、 $p < p_c$ では、それが無い。具体的には、 $c=3$ では、 $T_G(1) = 1.820478$ であり、 $c < 3$ の場合には、この系ではどんな相転移も起きない。

2.7 付録 B: 平衡における関係式

ランダムグラフ $G \in G(c, N)$ における頂点 i と頂点 $j \in B_i$ を考える。ここで、それぞれの頂点 j は、世代が頂点 i の方向には伸びて行かない Cayley 木 T_j^i の根と見なせると仮定する。

この条件の下で、頂点 $j \in B_i$ に対して、頂点 i を無視して、 $Z_j^{\mathbf{J}}(\sigma)/\sum_{\sigma'} Z_j^{\mathbf{J}}(\sigma')$ は σ_j が σ をとる確率である。ここで、 i に結合した頂点を、 $\{j_1, \dots, j_{l_i}\}$ と呼び直し、 i に結合していない頂点を、 $\{j_{l_i+1}, \dots, j_c\}$ と呼び直すことにする。この表現を用いて、あるボンド変数 \mathbf{J} において、 (σ_i, u_i) が平衡状態で (σ, u) をとる確率 $P_i^{\mathbf{J}, \text{eq}}(\sigma, u)$ の具体的形を、以下のように得ることができる。

$$P_i^{\mathbf{J}, \text{eq}}(\sigma, u) = \frac{1}{N_0^{\mathbf{J}}} \exp(-\beta \sigma(l_i - 2u)) \sum_{\sum_{b \leq l_i} \sigma_{j_b} = l_i - 2u} \prod_{b=0}^{l_i} \frac{Z_{j_b}^{\mathbf{J}}(\sigma_{j_b})}{\sum_{\sigma'} Z_{j_b}^{\mathbf{J}}(\sigma')} \prod_{b'=l_i+1}^c \frac{\sum_{\sigma'} Z_{j_{b'}}^{\mathbf{J}}(\sigma')}{\sum_{\sigma'} Z_{j_{b'}}^{\mathbf{J}}(\sigma')}. \quad (2.31)$$

但し N_0^J は $\sum_{\sigma,u} P_i^{J,\text{eq}}(\sigma,u) = 1$ で決定される。

以下で定義される確率 $\rho_{\sigma,l,u}^{\text{eq}}$ を考えてみよう。

$$\rho_{\sigma,l,u}^{\text{eq}} \equiv \delta\left(\sum_{j \in B_i} J_{ij} - l\right) P_i^{J,\text{eq}}(\sigma,u). \quad (2.32)$$

これは、 $\rho_{\sigma,l,u}(t \geq t_{\text{eq}})$ と同等である。ここで、 $\rho_{\sigma,l,u}^{\text{eq}}$ が選ばれた頂点 i に依存しないのと、 $Z_j^J(-1)/Z_j^J(1)$ が頂点 j に依存しないことは仮定している。また $\exp(\beta 2h_{\text{av}}) \equiv Z_j^J(-1)/Z_j^J(1)$ を定義すると、(2.30) で手に入れた $Q(h)$ を使って、 $\exp(\beta 2h_{\text{av}}) = \int dh Q(h) \exp(\beta 2h)$ となることがわかる。それから、確率 $\rho_{\sigma,l,u}^{\text{eq}}$ の厳密な表示を以下のように得ることができる。

$$\rho_{\sigma,l,u}^{\text{eq}} = \frac{1}{N_v} \binom{c}{l} p^l (1-p)^{c-l} \binom{l}{u} \exp(-\beta \sigma(l-2u)) \exp(u\beta 2h_{\text{av}}) (1 + \exp(\beta 2h_{\text{av}}))^{c-l}. \quad (2.33)$$

但し、(4.33) を使った。また N_v は条件 $\sum_{\sigma} \sum_{u \leq l} \rho_{\sigma,l,u}^{\text{eq}} = 1$ によって決まる。

次に、平衡において、あるボンド変数 J の下で、 (σ_i, u_i) と (σ_j, u_j) が、それぞれ (σ, u) と (σ', u') をとる確率 $P_{ij}^{J,\text{eq}}((\sigma, u), (\sigma', u'))$ を議論する。次の量を考えてみる。

$$P_B^{\text{eq}}((\sigma, l, u), (\sigma', l', u')) \equiv \frac{P_B^{\text{eq}}((\sigma, l, u), (\sigma', l', u'))}{\delta(J_{ij} - 1) \delta\left(\sum_{m \in B_i} J_{im} - l\right) \delta\left(\sum_{m \in B_j} J_{jm} - l'\right) P_{ij}^{J,\text{eq}}((\sigma, u), (\sigma', u'))}. \quad (2.34)$$

これは、 $P_B((\sigma, l, u), (\sigma', l', u'); t \geq t_{\text{eq}})$ と同等である。但し、 $P_B^{\text{eq}}((\sigma, l, u), (\sigma', l', u'))$ が、選ばれた結合した頂点 i, j に依存しないことを仮定している。 $\rho_{\sigma,l,u}^{\text{eq}}$ と同じように、以下のような厳密な表示を得ることができる。

$$\begin{aligned} P_B^{\text{eq}}((\sigma', l', u'), (\sigma, l, u)) &= \frac{1}{N_e} \binom{c-1}{l'-1} \binom{c-1}{l-1} p^{l'-1} (1-p)^{c-1-(l'-1)} \\ &\quad p^{l-1} (1-p)^{c-1-(l-1)} \binom{l'-1}{u'-\delta(\sigma+1)} \binom{l-1}{u-\delta(\sigma'+1)} p \exp(-\beta \sigma \sigma') \\ &\quad \exp(-\beta \sigma' (l'-1-2(u'-\delta(\sigma+1))) - \beta \sigma (l-1-2(u-\delta(\sigma'+1)))) \\ &\quad + (u'-\delta(\sigma+1) + u-\delta(\sigma'+1)) \beta 2h_{\text{av}}) (1 + \exp(\beta 2h_{\text{av}}))^{2c-l-l'}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

ただし、 N_e は $\sum_{\sigma'} \sum_{\sigma} \sum_{u \leq l} \sum_{u' \leq l'} P_B^{\text{eq}}((\sigma', l', u'), (\sigma, l, u)) = 1$ で決まる。こうして (2.33) と (2.35) から、以下の関係式を導くことができる。

$$\frac{P_B^{\text{eq}}((+1, l', u'), (\sigma, l, u))}{\sum_{l'', u''} P_B^{\text{eq}}((+1, l', u'), (\sigma, l'', u''))} = \frac{(l-u) \rho_{\sigma,l,u}^{\text{eq}}}{\sum_{l'', u''} (l''-u'') \rho_{\sigma,l'',u''}^{\text{eq}}}, \quad (2.36)$$

$$\frac{P_B^{\text{eq}}((-1, l', u'), (\sigma, l, u))}{\sum_{l'', u''} P_B^{\text{eq}}((-1, l', u'), (\sigma, l'', u''))} = \frac{u \rho_{\sigma,l,u}^{\text{eq}}}{\sum_{l'', u''} u'' \rho_{\sigma,l'',u''}^{\text{eq}}}. \quad (2.37)$$

参考文献

- [1] Griffiths R., *Phys. Rev. Lett.* **23** 17 (1969).
- [2] McCoy B. and Wu T. T., *Phys. Rev.* **176** 631 (1968).
- [3] Vojta T., *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** R143 (2006).
- [4] Hukushima K. and Iba Y., *J. Phys: Conf. Ser.* **95** 012005 (2008).
- [5] Harris A. B., *Phys. Rev. B* **12** 203 (1975).
- [6] Bray A. J. and Huifang D., *Phys. Rev. B* **40** 6980 (1989).
- [7] Barata J. C. A. and Marchetti D. H. U., *J. Stat. Phys.* **88** 231 (1997).
- [8] Laumann C., Scardicchio A. and Sondhi S. L., *Phys. Rev. E* **77** 061139 (2008).
- [9] Bray A. J., *Phys. Rev. Lett.* **60** 720 (1988).
- [10] Cesi F., Maes C. and Martinelli F., *Commun. Math. Phys.* **188** 135 (1997).
- [11] Alexander K. S., Cesi F., Chayes L., Maes C. and Martinelli F., *J. Stat. Phys.* **92** 337 (1998).
- [12] Mozeika A. and Coolen A. C. C., *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 195006 (2009).
- [13] Mézard M. and Parisi G., *Euro. Phys. J. B.* **20** 217 (2001).
- [14] Majumdar S. N. and Sire C., *Phys. Rev. Lett.* **70** 4022 (1993).
- [15] Dean D. S. and Majumdar S. N., *J. Stat. Phys.* **124** 1351 (2006).
- [16] Iwata M. and Sasa S., *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 075005 (2009).
- [17] Mimura K. and Coolen A. C. C., *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 415001 (2009).
- [18] Neri I. and Bolle D., *J. Stat. Mech. Theory Exp.* P08009 (2009).
- [19] Ohta H. and Sasa S., *Europhys. Lett.* **90** 27008 (2010).
- [20] Semerjian G. and Weigt M., *J. Phys. A: Math. Theor.* **37** 5525 (2004).
- [21] Hatchett J. P., Castillo I. Pérez, Coolen A. C. C. and Skantzos N. S., *Phys. Rev. Lett.* **95** 117204 (2005).
- [22] Ohta H. *arXiv:1007.3824*.

第3章 ランダム磁場 Ising 模型のゼロ温度 Glauber 動力学における集団動力学

3.1 先行研究と研究動機

集団現象に付随する遅い動力学は、様々な多体系で観測される。臨界緩和 [1]、秩序化過程 [2] やガラス状物質の遅い緩和 [3] など、多くの研究がなされている例に加え、これらと一見異なる現象が未だに発見され続けている。観測された現象が、定性的に新しいかどうかを判断するためには、その現象に内在する普遍性クラスを決定する必要がある。この文脈においては、遅い動力学を分類するための理論的方法の発展は重要である。

ここで平衡の臨界現象を分類するための、標準的な1つの行程を思い出してみよう。まず、ある平均場模型の秩序変数 m に関して、閉じた方程式 $m = \mathcal{F}(m)$ の解における定性的変化を調べる。それから、平均場模型と有限次元模型の違いを、繰り込み群の方法を使って調べるという行程がそれである。この成功例を下にすれば、典型的な平均場模型の動力学の解析は、遅い動力学の普遍性クラスを決定するための、第一歩となることが期待される。

より具体的な例を挙げると、完全グラフ上の Ising 模型の Glauber 動力学においては、磁化に関する時間発展方程式 $\partial_t m = \mathcal{G}(m)$ は厳密に導出可能である。この方程式を解析することにより、力学系理論 [4] の立場から、臨界的振る舞いはピッチフォーク分岐によって記述されることが明らかになっている。このような厳密な導出は、臨界緩和 [1] や秩序化過程 [2] の理解に大きな寄与をもたらした。他の例としては、完全グラフ上の球形 p スピングラス模型において、時間相関関数と応答関数に関する時間発展方程式が、厳密に導出されている [5, 6]。得られた時間発展方程式は、動的ガラス転移に関する一つの普遍性クラスを表現している [3]。これらの躍進は、統計模型からの遅い動力学の厳密導出の重要性を明示している。しかしながら、そのような成功例は、今の所稀と言ってよいだろう。

この章の主な目的は、1つの不純物を含むスピン模型から、適切な秩序変数で閉じた時間発展方程式を厳密に導出することにより、遅い動力学の非自明な普遍性クラスを捉えることである。単純であるが非自明な場合として、ランダム磁場 Ising 模型の零温度 Glauber 動力学を考える。この模型は雪崩や履歴、それらに付随する臨界的振る舞い等の遍在する現象を記述するための1つの模型である [7, 8, 9, 10, 11]。特に、理論的解析の第一歩として正則ランダムグラフ上の模型に焦点を当てる [12]。このグラフは、Bethe 格子と呼ばれるグラフの一つである [13]。今までに、Bethe 格子上の模型の準静的性質に関する、いくつかの興味深い結果が得られている [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]。この章においては、導出された方程式の分岐解析を行うことに依って、動的過程の特異な振る舞いを特徴付ける臨界指数の決定を行う。

3.2 模型

N 頂点からなるランダムグラフを考える。つまりグラフの各々の頂点は、無作為に選ばれた c 個の頂点と接続している。ランダムグラフ上のスピン変数 $\sigma_i = \pm 1$ とランダム磁場 h_i に対して、ランダム磁場 Ising 模型は、次のハミルトニアンで定義される。

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in B_i} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i=1}^N (H + h_i) \sigma_i. \quad (3.1)$$

但し、 B_i は頂点 i に接続した頂点の集合を表し、 H は一様な外場である。ランダム磁場 h_i は、分散 R の Gauss 分布 $D_R(h_i)$ に従うとする。まとめて $(\sigma_i)_{i=1}^N$ と $(h_i)_{i=1}^N$ は、それぞれ σ と h で表すことにする。 u_i は B_i 中の頂点における、上向きスピンの数とする。

そうすると、あるスピン配置に関して、頂点 i でのスピン反転に対するエネルギー増加を、 $-2\sigma_i \Delta_i$ と表すことができる。但し、

$$\Delta_i \equiv c - 2u_i - (H + h_i) \quad (3.2)$$

である。零温度 Glauber 動力学は、有限温度の標準的な Glauber 動力学に対する零温度極限の確率過程として定義される。具体的に、任意の頂点 i に関して、 $\sigma_i = -1$ で与えられる初期条件の場合を調べることにする。この場合、一度 σ_i が正になると決して戻ることはない。これから、時間発展規則は以下の単純な規則で表される。つまり、もし $\sigma_i = -1$ と u_i が $\Delta_i \leq 0$ を満たせば、スピンは遷移率 $1/\tau_0$ で反転する。そうでなければ、遷移は起こらない。注意すべきことは、 $\Delta_i(t) > 0$ の時、 $\sigma_i(t) = -1$ であり、 $\Delta_i(t)$ はそれぞれの標本で t の非増加関数であることである [14]。以下の議論では、ある h が与えられた際に、確率的な時間発展に依る確率を P^h で表し、量 X の h に関する平均を \bar{X} で表示する。

ここで考える動的模型は、時刻 $t = 0$ で外場を急に $-\infty$ から H にする物理操作に対応する。つまり、まず初期状態で全てのスピンが下向きで用意される。その時間発展最中に、無限に大きな雪崩現象が起きる環境変数 (R, H) における、発散する時間スケールが観測され得る。ここで解決したい課題は、その発散する時間スケールに付随する、系の特異な性質の正体を暴くことである。

3.3 秩序変数の時間発展方程式

最初に正則ランダムグラフの局所的構造は、Cayley 木と同じであることに注意する。Cayley 木と異なり、ランダムグラフは統計的に一様であり、それにより、理論解析は単純化される。おまけに、熱力学極限でランダムグラフ上の模型を解析する際には、輪の効果を考えなくて良いことが予想される。この仮定をしてもなお、動的振る舞いの理論解析は一直線とは行かない。なぜなら、 $j, k \in B_i$ 上の σ_j と σ_k は、一般に相関を持っているからである。この困難を、以下の3段階の方法で解決していく。

まず、スピン配置に関わらず $\sigma_i = -1$ に固定した系を考える。 Q^h によって、この模擬系における確率を表示する。 $j \in B_i$ に対して、 $q(t) \equiv \overline{Q^h(\sigma_j(t) = 1)}$ を定義する。ここで、ランダムグラフの統計的一様性に依って、 $q(t)$ は i と j に依存しない。次に、元の系にお

ける $\Delta_i(t) > 0$ である任意のスピン配置は、修正された系の時刻 t においても見いだされるということを確認しておく。ただしこれはもちろん、2つの系のランダム磁場と確率過程が同じという条件である。この事実から、 $P^h(\Delta_i(t) > 0)$ が $Q^h(\Delta_i(t) > 0)$ と同じ、という非自明な命題が導かれる。この関係を用いて、 $Q^h(\sigma_j(t) = 1)$ を使って $P^h(\Delta_i(t) > 0)$ を表現することができる。 h に関するこの量の平均は、 $\rho(t) \equiv \overline{P^h(\Delta_i(t) > 0)}$ という定義の下で、次の関係式を導く。

$$\rho(t) = \sum_{u=0}^c \binom{c}{u} q(t)^u (1 - q(t))^{c-u} \int_{-\infty}^{c-2u-H} dh D_R(h). \quad (3.3)$$

ただし、模擬系において、 σ_j と σ_k ($j, k \in B_i$) の統計的独立性を使った。表現 (3.3) は、模擬系において定義された $q(t)$ が元の系で定義された $\rho(t)$ と、1対1対応を持つことを示している。最後に、 $j \in B_i$ に対し、 $p(t) \equiv \overline{Q^h(\sigma_j = -1, \Delta_j \leq 0)}$ と $r(t) \equiv \overline{Q^h(\Delta_j(t) > 0)}$ を定義する。その時、(3.3) の導出と同様な手続きによって、 $dq(t)/dt$ が $p(t)/\tau_0$ と同じであることを見いだすことができ、 $r(t)$ もまた、 $q(t)$ の関数として表される。なぜなら、 $r(t)$ は、 $\sigma_i = -1$ かつ $\sigma_j = -1$ という模擬系における $\Delta_j(t) > 0$ の確率と同じであるからである。具体的に、 $r(t) = 1 - F(q(t))$ と書く。ここで、

$$F(q) = \sum_{u=0}^{c-1} \binom{c-1}{u} q^u (1-q)^{c-1-u} \int_{c-2u-H}^{\infty} dh D_R(h) \quad (3.4)$$

である。自明な関係式 $p(t) + q(t) + r(t) = 1$ とこれらの結果を合わせて、

$$\tau_0 \frac{dq}{dt} = F(q) - q \quad (3.5)$$

を得ることができる。この方程式が、初期条件 $q(0) = 0$ の下で、 $q(t)$ を決めることになる。ここで、時刻 t で固定されたランダム磁場 h の下で、スピン配置に関して、

$$\hat{\rho}(t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta(\Delta_i(t)) \quad (3.6)$$

を測ることを考える。但し、 $x > 0$ に関して $\theta(x) = 1$ 、そうでなければ $\theta(x) = 0$ である。大数の法則により、熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ で、 $\hat{\rho}(t)$ は $\rho(t)$ と等価である。

$\rho(t)$ は、(3.3) と (3.5) によって決められるので、MC 法で得られた $\hat{\rho}(t)$ と $\rho(t)$ を比べることができる。数値的な範囲で、この2つの結果がお互いに一致することは確かめた。また、 q の定義の下で、(3.5) の妥当性もまた確かめた。上で得られた結果の有効性の更なる証拠として、 $q(\infty) = F(q(\infty))$ を満たす定常解 $q(\infty)$ が、Cayley 木上のある漸化式 $Z_{n+1} = F(Z_n)$ の固定点条件と一致することを付記しておく。ただし、 Z_n は世代 n のある確率である。正確な Z_n の定義は [14] を参考にされたい。以下の言明については、一般性を失わずに $\tau_0 = 1$ とし、一つの例として、 $c = 4$ の場合を調べる。得られる結果は本質的には $c > 4$ の場合と同じである。 $c < 4$ の場合の振る舞いに関しては、定性的に $c \geq 4$ の振る舞いとは異なる。

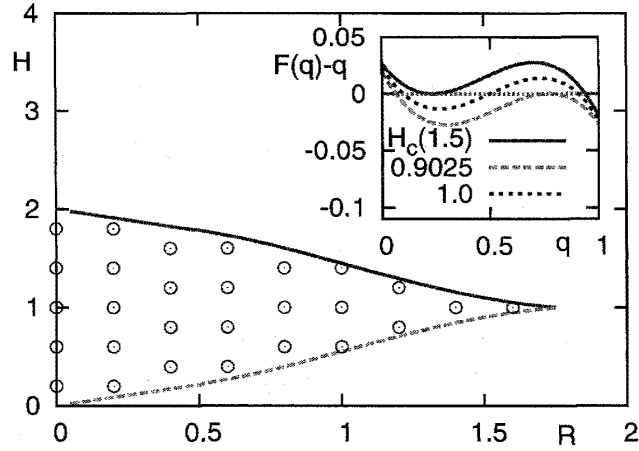


図 3.1: 相図。内枠: q の関数としての $F(q) - q$ 。 $R = 1.5$ 。 $H = 1.0$, $H = H_c(R)$ と $H = 0.9025$ 。(注) [H. Ohta and S. Sasa, *Europhys. Lett.* **90** 27008 (2010).] からの引用であり、この章における図 3.2 以外の他のすべての図も同論文からの引用である。

3.4 分岐解析

$R = 1.5$, $H = 1.0$ に関する (3.5) の解析から始めることにする。 $q(t)$ の定性的変化は、図 3.1 内枠で表示した $F(q) - q$ の形から理解される。つまり q_1 , q_2 と q_3 の 3 つのゼロ点があることがわかる。但し、 $0 < q_1 < q_2 < q_3 < 1$ である。 $[0, q_1)$ 中で、 $F(q) > q$ なので、初期条件 $q(0) = 0$ の下、 $t \rightarrow \infty$ で $q(t) \rightarrow q_1$ となる。図 3.1 に見られるように、この幾何的構造は、環境変数空間 $\alpha \equiv (R, H)$ のある領域で保たれている。ここで $q_i(\alpha)$ を q_i の環境変数依存性を表すことにする。その時、安定固定点 $q_1(\alpha)$ と不安定固定点 $q_2(\alpha)$ が実線上でぶつかり、安定固定点 $q_3(\alpha)$ と不安定固定点 $q_2(\alpha)$ は点線上でぶつかることがわかる。これらはどちらもサドルノード分岐と呼ばれる [4]。また 2 つの線は、臨界点 (R_{sp}, H_{sp}) で消えることもわかる。初期条件 $q(0) = 0$ の下での経路は、点線では特異性を示さないの、実線での分岐だけが今の問題では有意になってくる。この実線はスピノダル線とも呼ばれる [21]。上記の解析で確かめたように、 $c = 2$ と 3 に関しては、サドルノード分岐は起こらないことを付記しておく。このゼロ点の数の変化と q の時間発展の変化との関係について、より状況を把握しやすくするために、一様磁場が大きい (図 3.1 の実線より上領域) 値から一様磁場がちょうど実線の値まで変えることを考えてみよう。一様磁場が大きい場合は、初期条件で $q = 0$ から出発して $F(q') = q'$ となる q' まで増加していく。そして一様磁場を小さくしていくと、 q' はそれに伴い変化をしていくが、実線で $q'' < q'$ なる q'' で $F(q'') = q''$ となる。つまり、 q'' で時間発展は止まる。 q の定義から、 m は q と同じような増加を示すことが期待されるので、上の描像はそのまま m にも当てはまることが予想される。

次に、分岐点近くの違いい動力学の特異な振る舞いを調べることにする。まず、 $0 < R \ll R_{sp}$ となるように R の値を固定する。その時、サドルノード分岐が直線上 $(R, H_c(R))$ で起こる。 $q_c(R)$ を、 $q_1 = q_2 = q_c(R)$ となるサドルノード点とする。 $H = H_c(R) + \epsilon$, $q = q_c + u$

とする。図 3.1 内枠から、(3.5) が次のようになることがわかる。

$$\frac{du}{dt} = a_0\epsilon + a_2u^2 + O(|u|^3, |\epsilon u|). \quad (3.7)$$

但し、 $|u| \ll 1$ かつ $|\epsilon| \ll 1$ であり、 a_0 と a_2 は定数である。(3.7) の解は、次のスケーリング形で書くことができる。

$$u(t) = |\epsilon|^{1/2} \bar{u}_{\pm}(|\epsilon|^{1/2}t). \quad (3.8)$$

ただし、 $|\epsilon| \ll 1$ であり、 \bar{u}_+ と \bar{u}_- は、それぞれ $\epsilon > 0$ 、 $\epsilon < 0$ に関して、 ϵ に依存しない関数である。この結果、 $q = q_c$ 近くの特徴的時間は、 $\tau \simeq |\epsilon|^{-1/2}$ のように発散することが示唆される。ここで $\epsilon > 0$ の場合、 $q(t \rightarrow \infty) = q_3$ であることに注意されたい。それゆえ、 $q(t \rightarrow \infty)$ は不連続な変化を起こし、飛び幅は、 $q_1(\alpha) = q_2(\alpha)$ と $q_3(\alpha)$ の $\epsilon = 0$ での距離で与えられる。

次に、臨界点 (R_{sp}, H_{sp}) 近くの動的振る舞いに焦点を当てる。 $q = q_c(R_{sp}) + v$ と $(R, H) = (R_{sp}, H_{sp}) + (\eta, \epsilon)$ を (3.5) に代入することに依って、次を得る。

$$\frac{dv}{dt} = c_0\epsilon + c_1\eta v - c_3v^3 + O(|v|^4, |\epsilon v|, |\eta v^2|). \quad (3.9)$$

但し、 $|v| \ll 1$ 、 $|\epsilon| \ll 1$ と $|\eta| \ll 1$ の場合においてである。 c_0 、 c_1 と c_3 は定数である。系の振る舞いは 2 つの型に分類できる。一つ目は、 $|\eta| \gg |\epsilon|^{2/3}$ において、(3.9) の解は、 $|\eta| \ll 1$ で $v = |\eta|^{1/2} \bar{v}_{1\pm}(|\eta|t)$ と表現される場合である。このスケーリング形は、ピッチフォーク分岐近くのそれと同等である。これは、[22, 23, 24] における予想と関係しているかもしれない。2 つ目は、 $R = R_{sp}$ と固定した場合を含む $|\eta| \ll |\epsilon|^{2/3}$ の場合であり、(3.9) の解は次で表される。

$$v = |\epsilon|^{1/\delta} \bar{v}_{2\pm}(|\epsilon|^{\zeta}t). \quad (3.10)$$

但し、 $|\epsilon| \ll 1$ であり、 $\delta = 3$ 、 $\zeta = 2/3$ となる。特徴的時間は $\tau \simeq |\epsilon|^{-\zeta}$ のように、臨界点 (R_{sp}, H_{sp}) 近くで発散を示す。2 つのスケーリング形に加え、スピノードル線に沿った q の不連続な飛びの幅を計算することもできる。実際、臨界点付近で $(-\eta)^\beta$ ($\beta = 1/2$) に比例する [16, 17]。

この節の最後に、 ρ と m の分岐構造に関する注を付記する。(3.3) と (3.5) から、 ρ に関する微分方程式 $\partial_t \rho = G(\rho)$ も得ることができる。 ρ は q と一対一対応を持つので、方程式 $\partial_t \rho = G(\rho)$ もまた、 q と同じ点でサドルノード分岐を示す。それゆえ、上で導出された全ての臨界指数は ρ に関しても適用可能である。さらに、磁化 $m(t) = 2P^h(\sigma_i = 1) - 1$ に対しても、次の微分方程式が導出できる。

$$\tau_0 \frac{dm}{dt} = -m + (1 - 2\rho). \quad (3.11)$$

(3.3)、(3.5) とこの方程式は、磁化の時間発展を厳密に記述することができる。つまり m の特異性は、 q の分岐構造で決定されていることになる。実際に、式 (3.11) を解くことによって得られた磁化の時間発展を図 3.2 に示した。 $H = 1.1$ の磁化の増加が滞る領域は、サドルがまさにできようとしていることに対応している。これにより、先ほど q に対して行った考察が、 m に対しても当てはまることも確認できた。

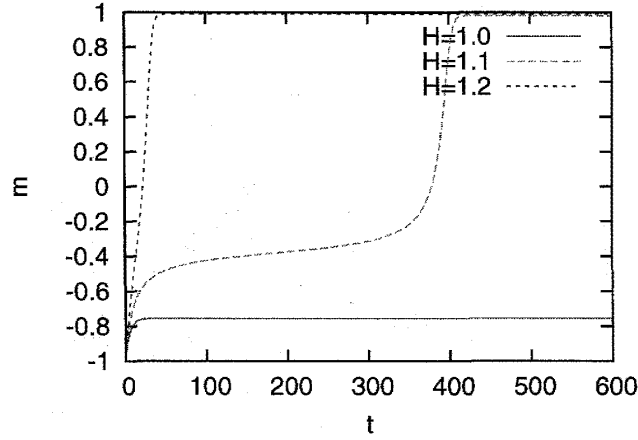


図 3.2: (3.11) から計算された磁化の時間発展。 $R = 1.5 (< R_{\text{sp}})$ 。

3.5 有限サイズゆらぎ

大きい有限の N の系においては、 $\hat{\rho}$ のゆらぎが観測される。その基本的な特徴付けは、次で定義される強度で与えられる。

$$\chi_{\rho}(t) \equiv N \langle (\hat{\rho}(t) - \langle \hat{\rho}(t) \rangle)^2 \rangle. \quad (3.12)$$

但し、 $\sigma(t)$ と h で決まる量 $\hat{X}(t)$ に関して、 $\langle \hat{X}(t) \rangle \equiv \overline{\sum_{\sigma} P^h(\sigma(t) = \sigma) \hat{X}(t) |_{\sigma(t)=\sigma}}$ である。ここでの問題は、 $0 < \epsilon \ll 1$ 、 $\eta = 0$ という条件の下で、 χ_{ρ} の特異的振る舞いを決めることである。 ρ_c を、 $q = q_c(R_{\text{sp}})$ で (3.3) に依って定義されたとしよう。そのとき、 $\hat{\rho}(t) \simeq \rho_c$ 近くで、次を仮定する。

$$\hat{\rho}(t) - \rho_c = A(\epsilon, N) \hat{F}(t/\tau(\epsilon, N)). \quad (3.13)$$

但し、 A と τ は、それぞれ振幅と特徴的時間の典型的値であり、 \hat{F} は、 A と τ でスケールされる時間依存のゆらぐ量である。また次のような有限サイズ関係式に対する予想を立ててみる。

$$\begin{aligned} A(\epsilon, N) &= N^{-1/(\nu\delta)} F_A(\epsilon N^{1/\nu}), \\ \tau(\epsilon, N) &= N^{\zeta/\nu} F_{\tau}(\epsilon N^{1/\nu}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

但し、 $x \gg 1$ において、 $F_A(x) \simeq x^{1/\delta}$ であり、 $x \gg 1$ において、 $F_{\tau}(x) \simeq x^{-\zeta}$ であり、それぞれ $x \ll 1$ において、 $F_A(x) = \text{定数}$ と $F_{\tau}(x) = \text{定数}$ を満たす。ここで、指数 ν は、2つの領域を特徴づけるクロスオーバーサイズ N_c であり、 $N_c \simeq \epsilon^{-\nu}$ のようなベキ則の形で特徴づける。また、次も得ることができる。

$$\chi_{\rho}(\tau(\epsilon, N)) = N^{\gamma/\nu} F_{\chi}(\epsilon N^{1/\nu}). \quad (3.15)$$

但し、 $\gamma = \nu - 2/\delta$ である。 ζ と δ の値は、上述した通り既に決定されている。以下の節で、 ν の値の導出を行う。

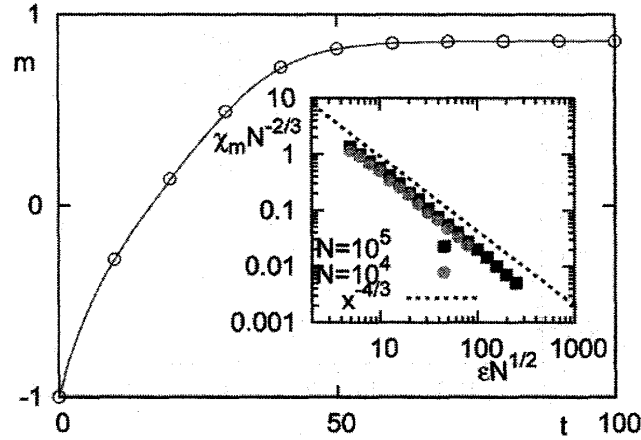


図 3.3: $R = 1.781258 (\simeq R_{sp})$, $H = 1.1$ での磁化の時間発展。 $H_{sp} = 1$. 丸は $N = 10^5$ での MC 法に依る結果、曲線は力学系 (3.11), (3.3), (3.5) の解である。内枠: $\epsilon N^{1/2}$ の関数としての $\chi_m N^{-2/3}$ 。直線は $\chi_m \simeq \epsilon^{-4/3}$ を表す。

臨界点 (R_{sp}, H_{sp}) 付近の $\hat{\rho}$ の定性的振る舞いは、系が有限サイズであることに起因するわずかなゆらぎと (3.9) で記述される。そのゆらぎには 2 つの型がある。一つは確率的時間発展からくるもので、もう一つは \mathbf{h} のばらつきからくるものである。前者は、 $1/N$ に比例するノイズ強度の弱い Gauss 白色ノイズで表現され、後者は (3.9) の係数に対し弱いばらつきを生み出す。特に、 ϵ は $\epsilon + \hat{g}/\sqrt{N}$ で置き換えられる。但し、 \hat{g} は時間に依存しない量で Gauss 分布に従うとする。その時、ゆらぎ効果と決定論的外力との釣り合いによって、2 つの特徴的サイズが定義される。確率的時間発展からの影響として、その特徴的サイズ N_s は、経路積分表現の動的作用 $\int dt [Nc_4(\partial_t v - c_0\epsilon + c_3v^3)^2 + c_5v^2]$ から見積もられる。但し最後の項はいわゆる、Jacobi 行列式であり、 c_4 と c_5 は定数である。実際、 $\epsilon^2 \simeq v^6 \simeq v^2/N_s$ に関する釣り合いによって、 $N_s \simeq \epsilon^{-4/3}$ が導かれる。同様な言明については、[25, 26] を参考にされたい。一方、不純物に関するもう一つの特徴的サイズ N_q は、 $\epsilon \simeq 1/\sqrt{N_q}$ という釣り合いで見積もられ、これは $N_q \simeq \epsilon^{-2}$ を導く。 $\epsilon \ll 1$ に関して、 $N_s \ll N_q$ なので、系は $N \leq N_q$ の時、ゆらぎが支配的になる。この考察から、 $N_c = N_q \simeq \epsilon^{-2}$ という予想を立てることができる。つまり、 $\nu = 2$ と見積もられる。

実験や数値シミュレーションにおいては、磁化 $\hat{m} = \sum_{i=1}^N \sigma_i / N$ に関する統計的量が χ_ρ より簡単に測られる可能性が高い。 \hat{m} は $\hat{\rho}$ とは独立ではないので、 \hat{m} もまた臨界点で特異な振る舞いを示す。具体的に、揺らぎ強度 $\chi(t) \equiv N (\langle \hat{m}^2(t) \rangle - \langle \hat{m}(t) \rangle^2)$ は上述の指数で特徴づけられる。この主張を確かめるために、MC 法で $\chi(t)$ を測ることにする。その時、特徴的時間は $\chi(t)$ が最大値 χ_m となる時刻 t_* で定義される。上述の理論解析によれば、 $t_* \simeq \epsilon^{-2/3}$ であり、 $x \gg 1$ に関して、 $\chi_m = N^{2/3} \bar{\chi}_m(\epsilon N^{1/2})$ である。但し、 $\bar{\chi}_m(x) \simeq x^{-4/3}$ である。図 3.3 で表示した数値的結果は理論的予測と矛盾しないことがわかる。

3.6 結び

正則ランダムグラフ上のランダム磁場 Ising 模型の動的振る舞いを記述する、秩序変数 ρ に関する厳密な時間発展を導出した。この力学系から、各種臨界指数の値 $\zeta = 2/3$ 、 $\delta = 3$ 、 $\nu = 2$ と $\gamma = 4/3$ を決定した。今回の研究に関連するいくつかの問題群がある。例としては、より一般の時間依存の $H(t)$ 、有限温度、平衡相転移とつながりを持つ多数のスピンフリップの動力学の系などが挙げられる [16, 19, 22, 27, 28]。そのような系の解析は興味深い、今回の方法をそれらに適用するのは、一直線ではなさそうである。別の方向性としては、外場を準静的に変化させた時の雪崩サイズ S の分布関数 $\mathcal{D}(S)$ に関する先行研究がある。ちなみに $\mathcal{D}(S)$ は、 $R \simeq R_{\text{sp}}$ と $H = H_{\text{sp}}$ に関して $S^{-a} F_{\mathcal{D}}(S^b(R - R_{\text{sp}}))$ に従うことが知られている [15, 21]。指数 a と b は、この論文で導出された指数と関係すると予想される。それを明らかにすることは、重要な将来の課題であると言える。

この章を終える前に、今回の研究を下に、 d 次元格子上ランダム磁場 Ising 模型における臨界現象を議論する。 ν_m を、上部臨界次元 d_u より高次元の相関長の発散を特徴づける臨界指数とする。有限次元系の有効的記述として、(3.9) に対して標準的な拡散結合を仮定すると、動的臨界指数 $z \equiv \zeta/\nu_m = 2$ と予想できる。これにより、 $\nu_m = 1/3$ が導かれる。

ハイパースケーリング則を上部臨界次元に適用することにより、 $\nu = d_u \nu_m$ という関係も予想できる [29]。これは、 $d_u = \nu/\nu_m = 6$ を導き、先行研究の結果と矛盾しない [21]。また、3 次元系の時間と長さスケールの発散を特徴づける指数を ν_3 、 ζ_3 すれば、 $\zeta_3 \simeq 1.3$ と $\nu_3 \simeq 0.7$ という値が数値計算で見積もられている [22, 30, 31]。このような有限次元系の理論解析は、今回の研究の拡張として試みられうるだろう。これは、先行研究 [21, 32] と相補的になるかもしれない。最後に、空間構造を直接捉える方法を用いた実験において、今回の研究で対象にした普遍性クラスを発見することは、今後の大変興味深い研究の一つであることに言及しておきたい [10, 11, 33]。

参考文献

- [1] Hohenberg P. C. and Halperin B. I., *Rev. Mod. Phys.* **49** 435 (1977).
- [2] Bray A. J., *Advances in Physics* **43** 357 (1994).
- [3] Cavagna A., *Physics Reports* **476** 51 (2009).
- [4] Guckenheimer J. and Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York (1983).
- [5] Crisanti A., Horner H. and Sommers H. J., *Z. Phys. B* **92** 257 (1993).
- [6] Cugliandolo L. F. and Kurchan J., *Phys. Rev. Lett* **71** 173 (1993).

- [7] Berger A., Inomata A., Jiang J. S., Pearson J. E. and Bader S. D., *Phys. Rev. Lett* **85** 4176 (2000).
- [8] Sethna J. P., Dahmen K. A. and Myers C. R., *Nature* **410** 242 (2001).
- [9] Marcos J., Vives E., Manosa L., Acet M., Duman E., Morin M., Novak V. and Planes A., *Phys. Rev. B* **67** 224406 (2003).
- [10] Lobue M., Basso V., Beatrice G., Bertotti C., Durin G. and Sasso C. P., *J. Magn. Mat.* **290** 1184 (2005).
- [11] Im M.-Y., Kim D.-H., Fischer P. and Shin S.-C., *Appl. Phys. Lett.* **95** 182504 (2009).
- [12] 全結合模型は、有限次元系と定性的に異なる振る舞いをみせる [17, 18]。
- [13] Mézard M. and Parisi G., *Eur. Phys. J. B* **20** 217 (2001).
- [14] Dhar D., Shukla P. and Sethna J. P., *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** 5259 (1997).
- [15] Sabhapandit S., Dhar D. and Shukla P., *J. Stat. Phys.* **98** 103 (2000).
- [16] Colaioni F., Gabrielli A. and Zapperi S., *Phys. Rev. B* **65** 224404 (2002).
- [17] Dobrin R., Meinke J. H. and Duxbury P. M., *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** 247 (2002).
- [18] Illa X., Shukla P. and Vives E., *Phys. Rev. B* **73** 092414 (2006).
- [19] Illa X., Rosinberg M. L. and Tarjus G., *Eur. Phys. J. B* **54** 355 (2006).
- [20] Rosinberg M. L., Tarjus G. and Pérez-Reche F. J., *J. Stat. Mech.* P03003 (2009).
- [21] Dahmen K. A. and Sethna J. P., *Phys. Rev. B* **53** 14872 (1996).
- [22] Pérez-Reche F. J. and Vives E., *Phys. Rev. B* **70** 214422 (2004).
- [23] Colaioni F., Alava M. J., Durin G., Magni A. and S. Zapperi, *Phys. Rev. Lett.* **92** 257203 (2004).
- [24] Liu Y. and Dahmen K. A., *Europhys. Lett.* **86** 56003 (2009).
- [25] Ohta H. and Sasa S., *Phys. Rev. E* **78** 065101(R) (2008).
- [26] Iwata M. and Sasa S., *J. Phys. A: Math. Gen.* **42** 075005 (2009).
- [27] Bruinsma R., *Phys. Rev. B* **30** 289 (1984).
- [28] Alava M. J., Basso V., Colaioni F., Dante L., Durin G., Magni A. and Zapperi S., *Phys. Rev. B* **71** 064423 (2005).
- [29] Botet R., Jullien R. and Pfeuty P., *Phys. Rev. Lett.* **49** 478 (1982).

- [30] Carpenter J. H. and Dahmen K. A., *Phys. Rev. B* **67** 020412(R) (2003).
- [31] Ohta H. and Sasa S., *Phys. Rev. E* **77** 021119 (2008).
- [32] Müller M. and Silva A., *Phys. Rev. Lett.* **96** 117202 (2006).
- [33] Kim D.-H., Akinaga H. and Shin S.-C., *Nature Phys.* **3** 547 (2007).

第4章 拘束動力学模型における集団動力学

4.1 先行研究と研究動機

近年、コロイドや粉体等の「柔らかい」物質が、豊かな振る舞いを見せることから、多くの興味を引いている。例えば、そのような系は低温高密度状態で過冷却状態になり得る [1]。そのような条件下では、特徴的時間が温度や密度の関数として振る舞い、非 Arrhenius 則をしばしば示す。その振る舞いは、物性に多大な影響を与える。多体系におけるそのような変則的な動的振る舞いの機構を理解することは、統計物理学の分野では重要な課題である。

拘束動力学模型は非アレニウス則を示す単純な多体系である [2, 3, 4]。今までに、有限次元格子上での拘束動力学模型における特徴的時間が、超 Arrhenius 型や Vogel-Fulcher 型の振る舞いを見せることが、厳密に示されている [6, 5]。さらに、Bethe 格子上の拘束動力学模型の場合には、別の非 Arrhenius 型の振る舞いが MC 法に依って観測されている [7]。静的側面からは、この非 Arrhenius 則は k コアパーコレーションによる非エルゴード転移に起因する。ちなみに、この転移は熱力学相転移ではない。具体的には、このパーコレーション転移点で、特徴的時間はベキ則で発散していく。この発散はモード結合方程式で支配されていると思われる [7]。

上で述べたモード結合方程式は、コロイドや粉体系の変則的な動的振る舞いにも関わることが信じられている。関連する予想としては、有限次元系は、ある平均場の下でのモード結合方程式によって記述される非エルゴード転移を、模した振る舞いをするというものである。もちろん、それは本当の相転移ではなく、強い有限サイズ効果に他ならない [1]。拘束動力学の場合も、Bethe 格子上のある模型特有に観測される非エルゴード転移は、有限次元系では起こらないということが厳密に示されている。ただし、この場合も、Bethe 格子上における非エルゴード転移を模した強い有限サイズ効果は観測される [8, 9]。

これにより、上述した異なる有限次元系における強い有限サイズ効果の出現において、普遍的な機構が存在するのかどうかという疑問が浮かぶ。この問題を解決するためには、拘束動力学模型とモード結合方程式の関係性を見いださなければならない。しかしながら、Bethe 格子上の模型における非エルゴード転移を記述するモード結合方程式は、未だに導出されていない。ただし、今までに拘束動力学模型に対するモード結合方程式の導出に関する研究はいくつかある [10, 11, 12, 13, 14]。

この論文では、そのような関係性を理解していく第一歩として、Bethe 格子上の Fredrickson-Andersen 模型において見いだされる、非エルゴード転移の普遍性クラスの動的側面を明らかにすることを試みる。具体的には、転移点より高温で定常解として厳密な平衡状態を与える摂動解析を使って、模型から力学系の近似導出を行う。実際、導出した力学系の時

間依存解と MC 法による結果の差異は、摂動系列上で系統的に小さくなっていくことを示す。さらに、この系統的摂動解析は、ある動的スケーリング則の存在を明らかにする。この動的スケーリング則は、非エルゴード転移付近の長さスケールと時間スケール間の、普遍的振る舞いに対しての示唆を与えることがわかる。

4.2 模型

$N \in \mathbb{N}$ の頂点が、無作為に選んだ $c \in \mathbb{N}$ 個の頂点と繋がったランダムグラフを考える。ここで N は自然数の集合とする。 $G(c, N)$ を、そのようなランダムグラフの集合とする。 $G \in G(c, N)$ のそれぞれの頂点 $i \in \{1, \dots, N\}$ で定義されたスピン変数 $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ に対して、ここで考えるハミルトニアンは次である。

$$H(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i. \quad (4.1)$$

ここで、まとめて $\sigma \equiv (\sigma_i)_{i=1}^N$ と表すことにする。系の動力学を定義するための準備段階として、状態 σ から状態 $F_i \sigma$ への詳細釣り合いを満たした遷移率 $r(\sigma, F_i \sigma)$ を考える。但し、 $F_i \sigma = (\sigma_1, \dots, -\sigma_i, \dots, \sigma_N)$ である。 B_i を頂点 i の一つ隣の頂点の集合とする。次に、以下の動的規則を考える。もし B_i 内の頂点上の上向きスピンの数が、 $k \in \mathbb{N}$ 以上である場合、頂点 i のスピンは絶対に反転することはできない。そうでなければ、頂点 i 上のスピンは遷移率 $r(\sigma, F_i \sigma)$ で反転する。別の表現をとれば、この動的規則の下では、 σ から $F_i \sigma$ への遷移率 $T(\sigma \rightarrow F_i \sigma)$ は $r(\sigma, F_i \sigma) \Theta(2k - c - \sum_{j \in B_i} \sigma_j)$ となる。ただし、 $x > 0$ に関して $\Theta(x) = 1$ であり、それ以外で 0 である。 $\Theta(2k - c - \sum_{j \in B_i} \sigma_j) = 0$ であるスピン σ_i の状況を、「動的に拘束された」、または、単に「拘束された」と呼ぶことにする。時刻 t でスピン配置が σ である確率に関するマスター方程式は次である。

$$\partial_t P(\sigma, t) = \sum_{i=1}^N [T(F_i \sigma \rightarrow \sigma) P(F_i \sigma, t) - T(\sigma \rightarrow F_i \sigma) P(\sigma, t)]. \quad (4.2)$$

この章では、遷移率に関して次の場合を考えることにする。

$$r(\sigma, F_i \sigma) = \min(1, \exp(\frac{H(\sigma) - H(F_i \sigma)}{T})). \quad (4.3)$$

この拘束動的規則の下で、平衡分布は定常分布であることがわかる。さらに、平衡状態では、1 頂点当りの磁化は $m_{\text{eq}}(T) = \tanh(1/2T)$ であり、エネルギー密度は $-\tanh(1/2T)/2$ である。それゆえ、この系に熱力学的相転移はない。この章では、MC 法は以下の規則で行われる。まず、ある頂点 i を無作為に選ぶ。次に、頂点 i 上のスピンは確率 $T(\sigma \rightarrow F_i \sigma)$ で反転する。この行程を繰り返し、 $t = 1$ は N 回の行程で定義される。熱力学極限で、この MC 法は (4.2) で記述される系の動力学と同等となる。

ここで手短に、先行研究で議論されている [7]、上述の拘束動力学によって引き起こされる、非エルゴード転移の静的側面を概説する。あるスピン σ_i が拘束されているとする。もしこの拘束が永続的であれば、スピン σ_i の状況を「凍った」と呼ぶことにする。ここ

で、ランダムグラフにおいて輪の長さ $O(\log N)$ の効果を見捨てた時に、同じ構造を持つ Cayley 木を考える。 $g \in \{1, 2, \dots, g_{\max}\}$ を Cayley 木の世代とし、 $g = 1$ を Cayley 木の根に割り当てる。次の事象の確率 Q_g を考えてみよう。その事象とは、 $g-1$ 世代のスピン状態に依存せずに、温度 T の平衡条件下で与えられる g 世代のスピンが凍っていてかつ上向きであることである。グラフの構造から、次の関係式を得る。

$$Q_{g-1} = F(Q_g), \quad (4.4)$$

$$F(Q_g) = p(T) \sum_{n=k}^{c-1} \binom{c-1}{n} Q_g^n (1 - Q_g)^{c-1-n}. \quad (4.5)$$

ここで $p(T) \equiv 1/(1 + \exp(-1/T))$ である。ある $Q_{g_{\max}}$ の値に対して、漸化式 (4.5) を解くことにより、 $g \ll g_{\max}$ の Q_g は、 $Q(T) = F(Q(T))$ の解 $Q(h)$ となる。 $c = 4$ 、 $k = 3$ の場合には、 $Q(T)$ は十分高温で 0 である。しかしながら、低温にしていくと図 4.1 に示したように、ほとんどの $Q_{g_{\max}}$ に対して、有限温度 $T_c = 0.480898$ で、 $Q(T)$ は突然有限の値をとる。この特異点は k コアパーレーション点であり、それ以下では系は非エルゴード的である。 $Q(T)$ を使って、凍ったスピン密度 ϕ は次で表現される。

$$\begin{aligned} \phi(T) = & p(T) \sum_{n=k}^c \binom{c}{n} Q(T)^n (1 - Q(T))^{c-n} \\ & + (1 - p(T)) \sum_{n=k}^c \binom{c}{n} (Q'(T))^n (1 - Q'(T))^{c-n}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

ここで、 $Q'(T) = p(T) \sum_{n=k}^{c-1} \binom{c-1}{n} Q(T)^n (1 - Q(T))^{c-1-n}$ である。この模型において、 $2 < k < c$ で、この種の非エルゴード転移が起こることが知られている。つまり、 $0 < T_c < \infty$ である。 $k = c$ の場合は、 T_c は 0 であり、 $k \leq 2$ の場合は、 T_c は ∞ である。相図の概観を、図 4.1 右に示した。

4.3 動力学の第 0 次近似解析

マスター方程式 (4.2) は系の完全な情報を持っているが、 N が大きい時、系は非常に大きい 2^N の状態数を持つので、(4.2) から役に立つ情報を引き出すことは難しい。この困難を回避するために、 $N \rightarrow \infty$ でも有限の値となるような $N_{\text{eff}} \in \mathbb{N}$ 個の変数で系を記述することを考え、その変数で閉じた力学系を近似的に導出することを試みる。問題を単純にするため、初期条件 $\hat{m}(0) = -1$ に関する系の緩和の振る舞いを考えることにする。ただし、 $\hat{m}(t) \equiv \sum_{i=1}^N \sigma_i / N$ である。 $\hat{m}(0) = -1$ に関するスピン配置においては、拘束されたスピンは存在しないことに注意されたい。以下の解析においては、十分大きな N に対して、グラフ $G \in \mathcal{G}(c, N)$ を一つ固定し、 $\mathcal{G}(c, N)$ 総体については考えない。言葉を変えれば、以下の解析は熱力学極限で、ほとんど全てのグラフ $G \in \mathcal{G}(c, N)$ に適用可能である。

有効力学系を導出する始めの一步として、 $P_i(\sigma_i; t)$ を、時刻 t で σ_i が σ である確率とし、 $P_i((\sigma'_j) | \sigma'_i; t)$ を、時刻 t で σ_i が σ' という条件の下、 B_i における頂点上のスピン配置

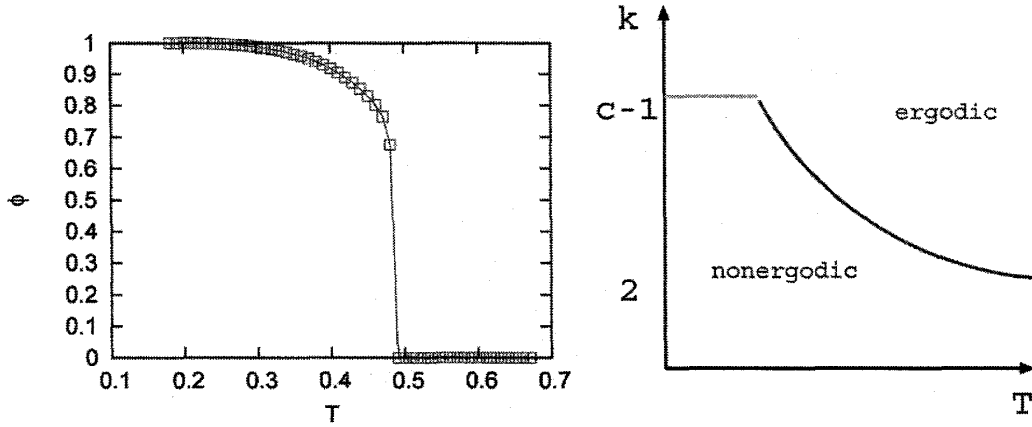


図 4.1: (左) 凍ったスピンの密度 ϕ 。 $c = 4, k = 3$ 。 (右) 相図の概観。(注) [H. Ohta, *J. Stat. Mech.* P01032 (2011).] からの引用であり、この章における図 4.8 以外の他のすべての図も同論文からの引用である。

が $(\sigma'_j)_{j \in B_i}$ である条件付き確率とする。その時、以下の厳密な表現をえる。

$$\begin{aligned} \partial_t P_i(\sigma; t) = & \sum_{(\sigma'_j)} \Theta(2k - c - \sum_{j' \in B_i} \sigma'_{j'}) \\ & [-r_\sigma P_i(\sigma; t) P_i((\sigma'_j) | \sigma; t) + r_{-\sigma} P_i(-\sigma; t) P_i((\sigma'_j) | -\sigma; t)]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

但し、 $r_\sigma \equiv \min(1, \exp(-\sigma/T))$ とした。ここで $P_i((\sigma'_j) | \sigma)$ の値が、選ばれた頂点 i に依存しないことを仮定する。少なくともこの問題の場合、ランダムグラフ G の輪の効果起因の系の非一様性は、熱力学極限で無視できるはずなので、この仮定は最もらしいと言える。この仮定は次と等価である。つまり、 $P_i((\sigma'_j) | \sigma)$ が、もしスピン変数 σ である頂点が無作為に選ばれた場合、一つとなりの頂点のスピン配置が (σ'_j) である確率 $P((\sigma'_j) | \sigma; t)$ と同じという仮定である。この仮定の下で、方程式 (4.7) は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_\sigma(t) = & \sum_{(\sigma'_j)} \Theta(2k - c - \sum_{j' \in B_\sigma} \sigma'_{j'}) \\ & [-r_\sigma \rho_\sigma(t) P((\sigma'_j) | \sigma; t) + r_{-\sigma} \rho_{-\sigma}(t) P((\sigma'_j) | -\sigma; t)]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

ただし、 B_σ はスピン変数 σ のある頂点と隣り合った頂点の集合で、 $\rho_\sigma \equiv \sum_{i=1}^N P_i(\sigma)/N$ である。熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ で ρ_σ が $\sum_i \delta(\sigma - \sigma_i)/N$ であると言って良いだろう。つまり、磁化は $m(t) = \sum_\sigma \sigma \rho_\sigma(t)$ と表すことができる。

次に、個々の頂点上のスピン変数は互いに独立であるという近似をする。ちなみに、平衡のスピン配置に対しては、この近似は厳密になる。つまり、 $P((\sigma'_j) | \sigma; t)$ を次のように書く。

$$P((\sigma'_j) | \sigma; t) = \prod_{j \in B_\sigma} \rho_{\sigma'_j}(t). \quad (4.9)$$

さらに、次のようなより簡単な表現を得る。

$$\sum_{(\sigma'_j)} \Theta(c - 2k - \sum_{j' \in B_\sigma} \sigma'_{j'}) \prod_{j \in B_\sigma} \rho_{\sigma'_j}(t) = \sum_{l=f}^c \binom{c}{l} \rho_{-1}(t)^l \rho_{+1}(t)^{c-l}. \quad (4.10)$$

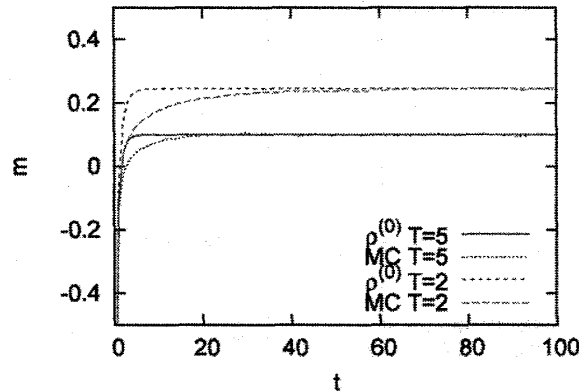


図 4.2: 力学系 (4.11) で記述された時間依存磁化 $\sum_{\sigma} \sigma \rho_{\sigma}$ と、 $N = 10^6$ での MC 法との \hat{m} 。
 $c = 4, k = 3$ 。

ここで、 $f \equiv c - k + 1$ という量を定義した。方程式 (4.7), (4.9) と (4.10) により、 $\rho^{(0)} \equiv (\rho_{\sigma})_{\sigma}$ で閉じた次の力学系を得る。

$$\partial_t \rho^{(0)} = \mathbf{G}^{(0)}(\rho^{(0)}). \quad (4.11)$$

力学系 (4.11) の定常解は、転移点より高温で厳密であることに注意されたい。しかしながら、中間時刻の系の振る舞いは、図 4.2 で見られるように MC 法と異なる。これは、近似 (4.9) が中間時刻における動力学を支配する非一様なスピン配置を捉えきれていないことを意味する。この論文では、力学系の解を得るため、時間刻み $dt = 10^{-2}$ で Runge-Kutta 法を使う。

ここで、ある頂点 i でスピンが反転するまでの時間、つまり頂点 i の持続時間 $\tau_p(i)$ を考える。次に、拘束されたスピンがお互い連結した頂点集合 C_i 内のある頂点 i に焦点を当てよう。明らかに、 $\tau_p(i)$ は、集合 C_i 内の頂点上の全体のスピン配置に強く依存する。なぜなら、 σ_i を反転させるためには、 C_i の端に位置する頂点からスピンをひっくり返して行かなければならない。平衡状態に関しては、 C_i 内のスピン配置は、スピンの向きに関して非一様である。これが示唆することは、持続時間に関わる、系の増大する緩和時間を捉えるためには、連結した拘束スピンの非一様配置の情報を得なければいけない、ということである。

4.4 動力学の摂動解析

前節の結果から、非一様スピン配置が、系の増大する緩和時間に重要な役目を果たすことは、ほぼ間違いない。それゆえ、解析をさらに進めるため、 N_{eff} の値を増やすことにより、注目した頂点の周りのスピン配置の情報を摂動的に有効変数に取り入れることを考える。そのような方針は、以前に他の系に適用されて、非自明な動力学の性質を決めるのに成功している [15, 16]。

4.4.1 第1層

注目する頂点の周りのスピン配置の最初の層に関する情報を、有効変数に取り入れることを試みる。その為に、 B_i 内の頂点上の下向きスピンの数を $w_i \in \{1, \dots, c\}$ とする。この表現により、頂点 i は (σ_i, w_i) で特徴づけられる。ここで、 $P_i(\sigma, w; t)$ を、 (σ_i, w_i) が (σ, w) をとる確率とし、 $P_{ij}(\sigma, w | \sigma', w'; t)$ をもし (σ_j, w_j) が (σ', w') である時に、 (σ_i, w_i) が (σ, w) である条件付き確率とする。

もちろん、 $\sum_{\sigma} \sum_{w=0}^c P_i(\sigma, w; t) = 1$ が成り立つ。これらの表現を使って、以下の厳密な時間発展方程式を得る。

$$\begin{aligned} \partial_t P_i(\sigma, w; t) = & (-r_{\sigma} P_i(\sigma, w; t) + r_{\sigma} P_i(\sigma, w; t)) \bar{\Theta}(w - f) \\ & + \sum_{j \in B_i} \sum_{\sigma'} \sum_{w'=f}^c r_{\sigma'} P_j(\sigma', w'; t) \\ & (P_{ij}(\sigma, w + \sigma' | \sigma', w'; t) - P_{ij}(\sigma, w | \sigma', w'; t)). \end{aligned} \quad (4.12)$$

ここで、 f は $c - k + 1$ であり、 $x \geq 0$ に対して $\bar{\Theta}(x) = 1$ であり、そうでなければ 0 である。

ここで、 $P_{ij}(\sigma, w | \sigma', w')$ の値は、もし 2 つの頂点 i, j が同じ距離を持つ 2 つの頂点の組から選ばれれば、その選ばれた頂点に依存しないことを仮定する。ランダムグラフ G の輪の効果起因の系の非一様性は、少なくともこの場合には、熱力学極限で無視できることを期待する。この仮定においては、 $j \in B_i$ に対して $P_{ij}(\sigma, w | \sigma', w'; t)$ が、次の事象に対する条件付き確率 $P_{c1}(\sigma, w | \sigma', w'; t)$ と同等となる。その事象とは、 (σ', w') で特徴づけられる頂点を無作為に選んだ後に、 (σ, w) で特徴づけられる頂点が、最初選んだ頂点の近傍から無作為に選ばれるというものである。

ここで次を定義する。

$$P_{c1}^{\sigma}(w | \sigma', w'; t) \equiv \frac{P_{c1}(\sigma, w | \sigma', w'; t)}{P_{c1}(\sigma | \sigma', w'; t)}. \quad (4.13)$$

ここで、 $P_{c1}(\sigma | \sigma', w'; t)$ は $P_{c1}(\sigma, w | \sigma', w'; t)$ と同様に定義される。すると、次が成り立つことがわかる。

$$P_{c1}(\sigma | \sigma', w'; t) = \frac{1}{c} C_{\sigma}(w'), \quad (4.14)$$

$$C_{\sigma}(w') = \begin{cases} c - w' & (\sigma = 1) \\ w' & (\sigma = -1). \end{cases} \quad (4.15)$$

それゆえ、次を得る。

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{\sigma, w}(t) = & (-\sigma r_{\sigma} \rho_{\sigma, w}(t) + \sigma r_{\sigma} \rho_{\sigma, w}(t)) \bar{\Theta}(u - f) \\ & + \sum_{\sigma'} \sum_{w'=f}^c r_{\sigma'} \rho_{\sigma', w'}(t) C_{\sigma}(w') (P_{c1}^{\sigma}(w + \sigma' | \sigma', w'; t) - P_{c1}^{\sigma}(w | \sigma', w'; t)). \end{aligned} \quad (4.16)$$

ここで、 $\rho_{\sigma, w} = \sum_{i=1}^N P_i(\sigma, w) / N$ である。 $\rho_{\sigma, w}$ は、熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ で $\sum_{i=1}^N \delta(\sigma - \sigma_i) \delta(w - w_i) / N$ と同等である。つまり、磁化は $m(t) = \sum_{\sigma} \sum_{w=0}^c \sigma \rho_{\sigma, w}(t)$ と表現される。

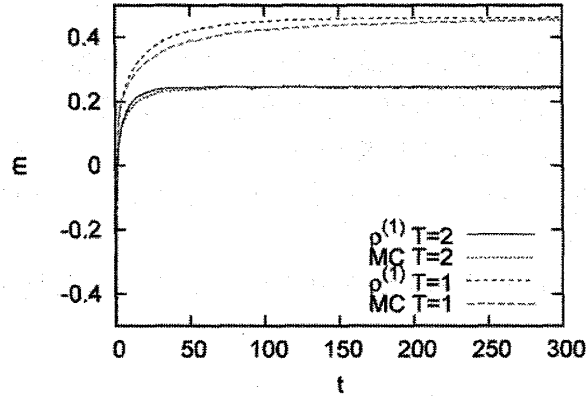


図 4.3: 力学系 (4.20) で記述される時間依存磁化 $\sum_{\sigma} \sum_{w=0}^c \sigma \rho_{\sigma,w}$ と $N = 10^6$ での MC 法で測られた \hat{m} 。 $c = 4, k = 3$ 。

ここで, $\rho^{(1)} \equiv (\rho_{\sigma,w})_{\sigma,w}$ で閉じた表現を得るために、以下の近似を行う。

$$P_{cl}^{\sigma}(w|\sigma', w'; t) = P_{cl}^{\sigma}(w|\sigma'; t). \quad (4.17)$$

これは平衡状態に関しては厳密である。そうすると、次が成り立つことがわかる。

$$P_{cl}^{\sigma}(w|-1; t) = \frac{w \rho_{\sigma,w}(t)}{\sum_{w=0}^c w \rho_{\sigma,w}(t)}, \quad (4.18)$$

$$P_{cl}^{\sigma}(w|+1; t) = \frac{(c-w) \rho_{\sigma,w}(t)}{\sum_{w=0}^c (c-w) \rho_{\sigma,w}(t)}. \quad (4.19)$$

方程式 (4.16), (4.17), (4.18) と (4.19) によって $\rho^{(1)}$ に関して、以下の閉じた力学系を得る。

$$\partial_t \rho^{(1)} = \mathbf{G}^{(1)}(\rho^{(1)}). \quad (4.20)$$

力学系 (4.20) の定常解も、転移点より高温では厳密である。さらに、力学系 (4.20) の動的振る舞いは、(4.11) の動的振る舞いより MC 法に近い。しかしながら、図 4.3 で表示した通り、温度を T_c に向かって下げて行くと、力学系 (4.20) の振る舞いは MC 法と徐々にずれてくる。このずれが示すことは、近似 (4.17) はやはり、低温の振る舞いを捉えることができないということである。

4.4.2 第2層

注目した頂点の周りのスピン配置の2層目の情報を、有効変数に取り込むことを試みる。ここで、そのような効果を含めるために以下のような頂点の特徴付けを考える。最初に、 $l_i \in \{1, \dots, c\}$ を B_i 内の頂点上の下向きスピンの数とする。次に、 $u_i \in \{1, \dots, c\}$ を B_i 内の上向きの拘束スピンの数、 $v_i \in \{1, \dots, c\}$ を B_i 内の下向きの拘束スピンの数とする。このように、頂点 i は、 $(\sigma_i, l_i, u_i, v_i)$ で特徴づけられる。これらの表現を使って、 $P_i(\sigma, l, u, v; t)$ を $(\sigma_i, l_i, u_i, v_i)$ が (σ, l, u, v) である確率とする。加えて、 $P_{ij}(\sigma_1, l_1, u_1, v_1 | \sigma_2, l_2, u_2, v_2; t)$ を、もし $(\sigma_j, l_j, u_j, v_j)$ が $(\sigma_2, l_2, u_2, v_2)$ である時に、 $(\sigma_i, l_i, u_i, v_i)$ が $(\sigma_1, l_1, u_1, v_1)$ をとる条件付き確率である。また、 $P_{i_1 i_2 i_3}((\sigma_1, l_1, u_1, v_1), (\sigma_2, l_2, u_2, v_2) | \sigma_3, l_3, u_3, v_3; t)$ を、もし

$(\sigma_{i_3}, l_{i_3}, u_{i_3}, v_{i_3})$ が $(\sigma_3, l_3, u_3, v_3)$ である時に、 $(\sigma_{i_1}, l_{i_1}, u_{i_1}, v_{i_1})$ と $(\sigma_{i_2}, l_{i_2}, u_{i_2}, v_{i_2})$ が、それぞれ $(\sigma_1, l_1, u_1, v_1)$ と $(\sigma_2, l_2, u_2, v_2)$ である条件付き確率とする。もちろん、次の関係式 $\sum_{\sigma} \sum_{l=0}^c \sum_{u=0}^{c-l} \sum_{v=0}^l P_i(\sigma, l, u, v; t) = 1$ が成り立つ。

以前の節のように、もし 2 つの頂点 i, j が同じ距離の頂点の組から選ばれると、 $P_{ij}(\sigma_1, l_1, u_1, v_1 | \sigma_2, l_2, u_2, v_2)$ の値が、選ばれた頂点の組に依存しないことを仮定する。加えて、もし 3 つの頂点 i_1, i_2 と i_3 を、順番にそれらの間の距離に関して同じ関係をもつ 3 つの頂点の集合から選んだ時に、 $P_{i_1 i_2 i_3}((\sigma_1, l_1, u_1, v_1), (\sigma_2, l_2, u_2, v_2) | \sigma_3, l_3, u_3, v_3)$ の値が、選ばれた頂点の集合に依存しないことを仮定する。これらの仮定は、ランダムグラフ G の輪の効果起因の系の非一様性は今の場合、熱力学極限で無視できるであろうから最もらしい。この仮定は、 $j \in B_i$ に対して、 $P_{ij}(\sigma_1, l_1, u_1, v_1 | \sigma_2, l_2, u_2, v_2)$ が、と $P_{c1}(\sigma_1, l_1, u_1, v_1 | \sigma_2, l_2, u_2, v_2)$ と同じであり、 $i_2 \in B_{i_1}, i_3 \in B_{i_2} (i_3 \neq i_1)$ に関して、確率 $P_{i_1 i_2 i_3}((\sigma_1, l_1, u_1, v_1), (\sigma_2, l_2, u_2, v_2) | \sigma_3, l_3, u_3, v_3)$ が以下の事象の確率 $P_{c2}((\sigma_1, l_1, u_1, v_1), (\sigma_2, l_2, u_2, v_2) | \sigma_3, l_3, u_3, v_3)$ と同じであることと等価である。それは、まず無作為に $(\sigma_3, l_3, u_3, v_3)$ で特徴づけられる頂点を選び、その後、その選んだ頂点に接続する 2 つの接続した頂点を無作為に選ぶという状況を考える。上で考える事象とは、この条件の下で、後に選んだ 2 つの頂点の内、最初に選んだ頂点から遠い方が、 $(\sigma_1, l_1, u_1, v_1)$ で特徴づけられ、近い頂点が $(\sigma_2, l_2, u_2, v_2)$ で特徴づけられるという事象である。

さらに、次を定義する。

$$P_{c1}^{l_1, \sigma_1}(u_1, v_1 | \sigma_2, l_2, u_2, v_2) \equiv \frac{P_{c1}(\sigma_1, l_1, u_1, v_1 | \sigma_2, l_2, u_2, v_2)}{P_{c1}(\sigma_1, l_1 | \sigma_2, l_2, u_2, v_2)}. \quad (4.21)$$

この表現を使って、次も定義する。

$$\begin{aligned} P_{c2}^{l_1, \sigma_1}(l_1, u_1, v_1 | (\sigma_2, l_2, u_2, v_2), (\sigma_3, l_3, u_3, v_3)) &\equiv \\ &\frac{P_{c2}((\sigma_1, l_1, u_1, v_1), (\sigma_2, l_2, u_2, v_2) | \sigma_3, l_3, u_3, v_3)}{P_{c2}(\sigma_1, l_1 | (\sigma_2, l_2, u_2, v_2), (\sigma_3, l_3, u_3, v_3))} \\ P_{c1}^{l_2, \sigma_2}(u_2, v_2 | \sigma_3, l_3, u_3, v_3) P_{c1}(\sigma_2, l_2 | \sigma_3, l_3, u_3, v_3). \end{aligned} \quad (4.22)$$

実際、次を得ることができる。

$$\begin{aligned} P_{c1}(\sigma_1, l_1 | \sigma_2, l_2, u_2, v_2) &= \frac{1}{c} C_{\sigma_1, l_1}(l_2, u_2, v_2), \\ C_{\sigma_1, l_1}(l_2, u_2, v_2) &= \begin{cases} u_2 & (\sigma_1 = 1, l_1 < f) \\ v_2 & (\sigma_1 = -1, l_1 < f) \\ l_2 - v_2 & (\sigma_1 = -1, l_1 \geq f) \\ c - l_2 - u_2 & (\sigma_1 = 1, l_1 \geq f), \end{cases} \quad (4.23) \\ P_{c2}(\sigma_1, l_1 | (\sigma_2, l_2, u_2, v_2), (\sigma_3, l_3, u_3, v_3)) &= \frac{1}{c-1} C_{\sigma_1, l_1}(l_2, u_2, v_2, \sigma_3, l_3), \\ C_{\sigma_1, l_1}(l_2, u_2, v_2, \sigma_3, l_3) &= \begin{cases} u_2 - \delta(\sigma_3 - \sigma_1) \Theta(f - l_3) & (\sigma_1 = 1, l_1 < f) \\ v_2 - \delta(\sigma_3 - \sigma_1) \Theta(f - l_3) & (\sigma_1 = -1, l_1 < f) \\ l_2 - v_2 - \delta(\sigma_3 - \sigma_1) \bar{\Theta}(l_3 - f) & (\sigma_1 = -1, l_1 \geq f) \\ c - l_2 - u_2 - \delta(\sigma_3 - \sigma_1) \bar{\Theta}(l_3 - f) & (\sigma_1 = 1, l_1 \geq f). \end{cases} \quad (4.24) \end{aligned}$$

これらの表現を使って、以下の時間発展方程式を書き下すことができる。

$$\begin{aligned}
 \partial_t \rho_{\sigma, l, u, v} = & (-r_{\sigma} \rho_{\sigma, l, u, v} + r_{-\sigma} \rho_{-\sigma, l, u, v}) \bar{\Theta}(l - f) \\
 & + \sum_{\sigma'} \sum_{l'=f}^c \sum_{u'=0}^{c-l'} \sum_{v'=0}^l r_{\sigma'} \rho_{\sigma', l', u', v'} C_{\sigma, l}(l', u', v') \\
 & [P_{c1}^{l, l+\sigma'}(u, v | \sigma', l', u', v') - P_{c1}^{l, \sigma}(l, u, v | \sigma', l', u', v')] \\
 & + \sum_{l''=f}^c \sum_{u''=0}^{c-l''} \sum_{v''=0}^l r_{+1} \rho_{+1, l'', u'', v''} C_{\sigma', l''}(l'', u'', v'') \\
 & \sum_{\sigma'} \sum_{u'=0}^{c-f+1} \sum_{v'=0}^{f-1} P_{c1}^{f-1, \sigma'}(u', v' | +1, l'', u'', v'') C_{\sigma, l}(l', u', v', +1, l'') \\
 & [P_{c2}^{l, \sigma}(u + \delta(\sigma' + 1), v + \delta(\sigma' - 1) | (\sigma', f - 1, u', v'), (+1, l'', u'', v'')) \\
 & - P_{c2}^{l, \sigma}(u, v | (\sigma', f - 1, u', v'), (\sigma'', l'', u'', v''))] \\
 & + \sum_{l''=f}^c \sum_{u''=0}^{c-l''} \sum_{v''=0}^l r_{-1} \rho_{-1, l'', u'', v''} C_{\sigma', l''}(l'', u'', v'') \\
 & \sum_{\sigma'} \sum_{u'=0}^{c-f} \sum_{v'=0}^f P_{c1}^{f, \sigma'}(u', v' | -1, l'', u'', v'') C_{\sigma, l}(l', u', v', -1, l'') \\
 & [P_{c2}^{l, \sigma}(u + \delta(\sigma' + 1), v + \delta(\sigma' - 1) | (\sigma', f, u', v'), (-1, l'', u'', v'')) \\
 & - P_{c2}^{l, \sigma}(u, v | (\sigma', f, u', v'), (-1, l'', u'', v''))]. \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\rho_{\sigma, luv} \equiv \sum_{i=1}^N P_i(\sigma, l, u, v; t)/N$ である。 $\rho_{\sigma, luv}$ は、熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ で、 $\sum_{i=1}^N \delta(\sigma - \sigma_i) \delta(l - l_i) \delta(u - u_i) \delta(v - v_i)/N$ となることが期待できる。これを使って、磁化は、 $m(t) = \sum_{\sigma} \sum_{l=0}^c \sum_{u=0}^{c-l} \sum_{v=0}^l \sigma \rho_{\sigma, luv}(t)$ と表される。

$\rho^{(2)} \equiv (\rho_{\sigma, luv})_{\sigma, luv}$ に関して、閉じた力学系を得るために、以下の近似を行う。

$$\begin{aligned}
 P_{c2}^{l_1, \sigma_1}(u_1, v_1 | (\sigma_2, l_2, u_2, v_2), (\sigma_3, l_3, u_3, v_3)) \\
 = P_{c1}^{l_1, \sigma_1}(l_1, u_1, v_1 | \sigma_2, l_2 \geq f), \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

$$P_{c1}^{l_2, \sigma_2}(u_2, v_2 | \sigma_3, l_3, u_3, v_3) = P_{c1}^{l_2, \sigma_2}(u_2, v_2 | \sigma_3, l_3 \geq f). \quad (4.27)$$

これらは、平衡状態においては厳密である。実際、 $P_{c1}^{l(\geq f), \sigma}(u, v | \sigma', l' \geq f)$ に関して、次の具体的表現を得る。

$$P_{c1}^{l(\geq f), \sigma}(u, v | +1, l' \geq f) = (c - l - u) \rho_{\sigma, luv} / \sum_{l' \geq f, uv} (c - l - u) \rho_{\sigma, luv}, \quad (4.28)$$

$$P_{c1}^{l(\geq f), \sigma}(u, v | +1, l' < f) = u \rho_{\sigma, luv} / \sum_{l' \geq f, uv} u \rho_{\sigma, luv}, \quad (4.29)$$

$$P_{c1}^{l(\geq f), \sigma}(u, v | -1, l' \geq f) = (l - v) \rho_{\sigma, luv} / \sum_{l' \geq f, uv} (l - v) \rho_{\sigma, luv}, \quad (4.30)$$

$$P_{c1}^{l(\geq f), \sigma}(u, v | -1, l' < f) = v \rho_{\sigma, luv} / \sum_{l' \geq f, uv} v \rho_{\sigma, luv}. \quad (4.31)$$

ここで、 $\sum_{l \geq f, uv} \equiv \sum_{l=f}^c \sum_{u=0}^{c-l} \sum_{v=0}^l$ であり、 $\sum_{l < f, uv} \equiv \sum_{l=0}^{f-1} \sum_{u=0}^{c-l} \sum_{v=0}^l$ である。つまり、方程式 (4.25)-(4.31) に依って、 $\rho^{(2)}$ に関して、以下のように閉じた力学系を得る。

$$\partial_t \rho^{(2)} = \mathbf{G}^{(2)}(\rho^{(2)}). \quad (4.32)$$

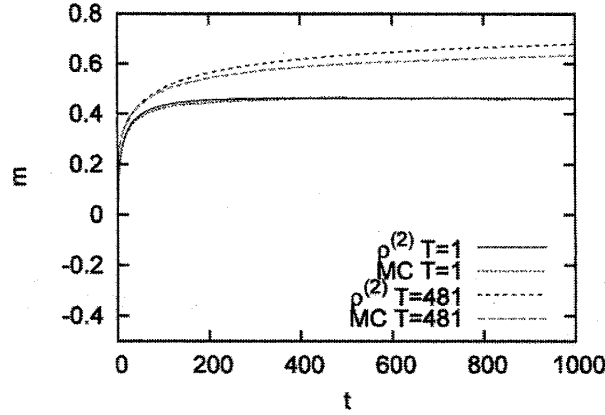


図 4.4: (4.32) で記述される時間依存磁化 $\sum_{\sigma} \sum_{l=0}^c \sum_{l=0}^{c-l} \sum_{v=0}^l \sigma \rho_{\sigma,luv}$ と $N = 10^6$ での MC 法で測られる \hat{m} 。 $c = 4, k = 3$ 。

力学系 (4.32) の定常解は、転移点より高温で厳密である。さらに、力学系 (4.32) の解は、前節の表現の解よりも MC 法により近くなっている。しかしながら、前節の表現と同様、4.4 に表示したように、その解は低温領域に入っていくと MC 法から徐々にずれていく。

4.5 摂動系列について

4.5.1 解の系統的改善

導出された力学系の解の、摂動系列上での変化の仕方を見て行こう。注目すべきことは、MC 法と導出された力学系の時間依存解の差は、図 4.5 左で表示したように、 $\rho^{(n)}$ の n の増加に関して、系統的に少なくなっていることである

MC 法によって、図 4.5 右で表示したように、全てのスピンの初期条件下で、磁化が長時間極限で $\hat{m}(t) - m_{\text{eq}}(T) \simeq \exp(-t/\tau)$ と振る舞うことがわかる。図 4.6 に表示したように、荒い τ の見積もりで、 $\tau \simeq \epsilon^{-\zeta}$ となることが予想される。但し、 $\zeta \simeq 3$ で、 $\epsilon \equiv (T/T_c - 1)$ である。実際、 $\zeta \simeq 3$ 近くの値が、先行研究 [7] において、持続時間に対して確認されている。

$G^{(n)}$ を、 $\hat{m}(0) = -1$ の下での定常解 $\rho_{\text{st}}^{(n)} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \rho^{(n)}(t)$ において線形化し、その線形化行列 $M^{(n)}$ の最大固有値（自明な 0 を除く）の逆数 $|\lambda^{(n)}|^{-1}$ で、定義される力学系の緩和時間 $\tau_n(T)$ を考えることにする。図 4.6 に表示したように、 $\tau_n(T)$ は $\epsilon^{-\zeta}$ のような振る舞いは見せず、 $\tau_n(T_c)$ は有限である。ただし、 ϵ が 1 から少し小さい範囲で、 $\tau_n(T)$ は $\epsilon^{-\zeta_n}$ ($\zeta_n < \zeta_{n+1} < \zeta$) と振る舞うように見える。これから、より高次の摂動解析が、 $\epsilon^{-\zeta}$ の振る舞いを捉えるためには必要であることがわかる。

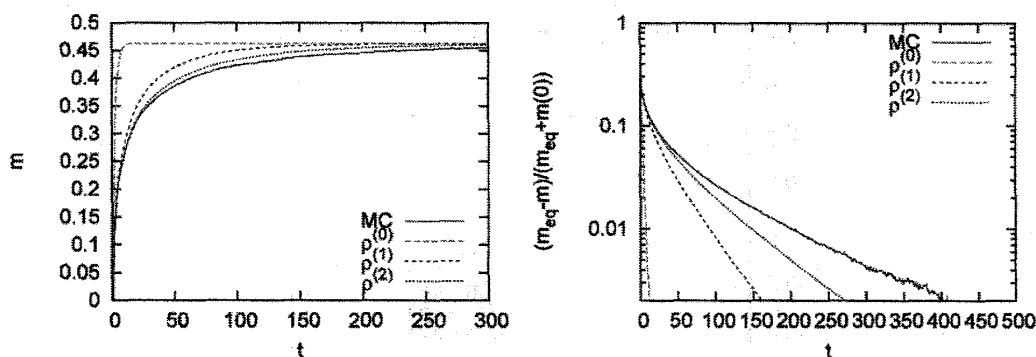


図 4.5: 力学系に記述された磁化と、 $N = 10^7$ での MC 法で測られた \hat{m} 。 $T = 1$, $c = 4$, $k = 3$ 。

4.5.2 高次摂動の系統的構成

この節では、今までに議論した解析よりも高次の摂動解析を考えることにする。ここで、4.4.1 節で議論した頂点を特徴づける方法を思い出してみる。解析中では、注目する頂点 i の「有効」状態を定義するために、 B_i 内の頂点の情報をつかった。そのような頂点 i の特徴付けの仕方を「1 次の特徴付け」とする。次に、4.4.2 節で議論した頂点の特徴付けの仕方を思い出してみる。解析中では、注目する頂点 i の「有効」状態を定義するために、 B_i と $B_j (j \in B_i)$ 内の頂点の情報を使った。言い換えれば、 B_i 内の頂点を、それぞれ 1 次の特徴付けに応じた種類分けを行いその数で、頂点 i を特徴づけるのである。そのような頂点 i の特徴付けを「2 次の特徴付け」とする。

この 2 次の特徴付けを用いて、頂点 i の情報を除いて、 B_i の頂点を種類分けできる。次に、頂点 i を、 B_i 内の上記の特徴付けで種類分けされた頂点の数で特徴づける。この行程によって、頂点 i の「3 次の特徴付け」を定義できる。これと同様な行程を繰り返し、任意次数の特徴付けを定義できる。

さらに 1 次摂動と 2 次摂動解析で用いた近似と本質的に同じ近似は、 n 次の摂動解析にも適用可能である。よって、転移点より高温では、定常解は厳密となる。この手法に依って、原理的には、任意の n 次の力学系で記述される緩和時間 $\tau_n(T)$ を計算することができる。この摂動系列において、形式的な「小さい」変数は、注目する頂点の有効状態を定義するために使った頂点間の距離と見なせる。ここで注意すべきことは、 n の具体的な値は、並び以外の重要性はない。また、定義により無限次摂動解析は、熱力学極限で元のマスター方程式を与えることが期待される。

4.5.3 T_c における最大固有値の動的スケーリング則

導出された力学系によって記述される解の系統的改善と、高次の摂動系列の系統的構成は、 n と $\tau_n(T)$ 間に何らかのスケーリング則があることを示唆する。ここで浮かび上がる最初の疑問は、どれくらい大きな n が $\tau_n(T_c)$ の発散を起こす、または $\lim_{n \rightarrow n_c} \tau_n(T_c) \rightarrow \infty$ となる n_c はいくつかというものである。最大の緩和時間をもたらす非一様なスピン配置で連結した頂点のサイズは、 $T = T_c$ の平衡のスピン配置で最大になりうるので、 $n_c = \infty$

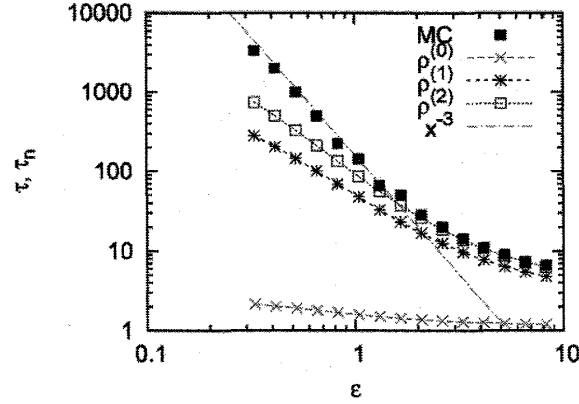


図 4.6: 緩和時間の ϵ 依存性。MC 法は $N = 10^6$ で行った。 $c = 4, k = 3$ 。

と予想できる。明示的に、 (c, k) に依存する関数 F を使って、 $\tau_n(T_c) = F(n, c, k)$ であり、 $n \rightarrow \infty$ で $F(n, c, k) \rightarrow \infty$ と書くことにする。

図 4.6 で見られるように、もし何らかのスケール関係が存在したとしても、 τ_0 はスケールリング領域から外れていることが予想される。よって、様々な (c, k) に関する $\tau_1(T_c)$ と $\tau_2(T_c)$ に着目することにする。ここで、この論文で行った摂動解析は、次数 n が大きくなるにつれて、より広い連結された拘束スピンの影響をとりこんでいることを思い出してみよう。それゆえ、 n 次の摂動解析で到達可能な相関サイズは、次数 n とともに増えるということは最もらしいといえよう。この考察の下に、まず、 $\mathcal{R}(c, k; \alpha)n^\alpha$ が n 次の摂動で到達可能な相関サイズを表すと仮定する。ここで、 \mathcal{R} と α はある定数である。 α を決定するには、系の相関サイズの性質についての情報が必要となってくる。これについては、4.5.4 節で扱う。さらに、 τ_n が到達可能な系の相関サイズに関してべき的振る舞いをすることを仮定する。よって、もし α の値が与えられれば、上記の仮定により、べき的振る舞いの指数を評価することができる。具体的には、次を仮定する。

$$\tau_n(T_c) = \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{R}(c, k; \alpha)n^\alpha, c, k), \quad (4.33)$$

ここで、 $\mathcal{R}(c, k; \alpha)$ はパラメータで、 $\mathcal{F}_\alpha(x, c, k) = Cx^{z^*}$ とする。驚くべきことに、図 4.7 に見られるように、数値解析の範囲で、任意の α に関して、 $\mathcal{F}_\alpha(x, c, k)$ が c に依存しないような \mathcal{R} があることがわかる。この結果は、 τ_n が n に関してべき的に振る舞うという仮定が最もらしいことを支持するといえよう。具体的には、 $\alpha z_*(k; \alpha) \simeq z'(k)$ ($z'(3) \simeq 2.15$), $z'(4) \simeq 2.4$) である。この結果から、次節で系の相関サイズの性質に関する予想を提出することにする。

4.5.4 動的スケールリング則から導かれる予想

法則 (4.33) は、動的スケールリング則 $\tau(T) \simeq \mathcal{N}(T)^z$ に従う特徴的サイズ \mathcal{N} が存在することを示唆する。ちなみに、 $\tau(T)$ は既に磁化の緩和によって定義されている。実際、 $\mathcal{N}(T)$ の候補はあり、それは最小組み替えサイズと呼ばれるものである。このサイズは、単純には、注目するスピンを反転させるための、注目するスピンの周りの頂点中で変化させる最

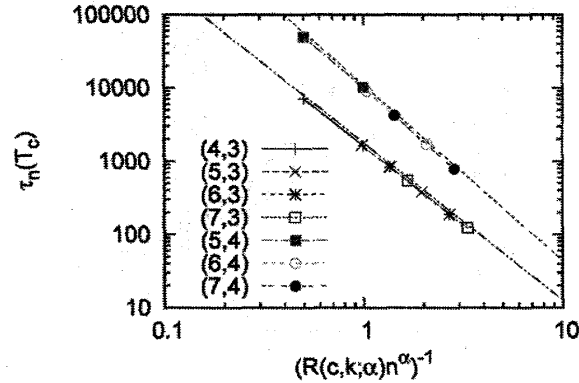


図 4.7: $(\mathcal{R}(c, k; \alpha)n^\alpha)^{-1}$ の関数としての $\tau_n(T_c)$ 。 $\mathcal{R}(4, 3; \alpha) = 1$, $\mathcal{R}(5, 4; \alpha) = 1$, $\alpha = 1$ とした。各パラメータは $\mathcal{R}(5, 3; 1) = 0.51$, $\mathcal{R}(6, 3; 1) = 0.37$, $\mathcal{R}(7, 3; 1) = 0.3$, $\mathcal{R}(6, 4; 1) = 0.48$, $\mathcal{R}(7, 4; 1) = 0.35$ である。 (\cdot, \cdot) は (c, k) を意味する。

小の数で定義される [17, 18]。先行研究は、FA 模型の非エルゴード転移近傍において、そのサイズが $\epsilon^{-\nu(c,k)}$ と振る舞うことを捉えている [18]。

ここで、 z と z_* の間の関係の理解を試みる。 z_* に関する結果は、 z が c に依存しないことを示唆する。それを確かめるために、 $z(c, k) = \zeta(c, k)/\nu(c, k)$ に依って、MC 法で 4, 3、(5, 3) と (5, 4)、(6, 4) の場合の、 z の値を見積もる。ここでは便宜上、 τ は、 $(m_{\text{eq}} - m(t))/(m_{\text{eq}} - m(0)) < \delta$ ($\delta = 0.001$) となるような t_0 に対し、 $\tau \equiv \min t_0$ で測った。もちろん、 τ 自体は、 δ に依存するが、温度依存性は δ にあまり依存しないことは確かめている。図 4.8 で見られるように、データはまだ乱れているが、 $z(4, 3) = z(5, 3) \simeq 1.9$ と $z(5, 4) = z(6, 4) \simeq 2.2$ と荒く見積もれる。これを、より精緻な数値計算で評価することは、将来の課題となる。この観測は次の予想を導く。つまり、拘束動力学における非エルゴード転移の普遍性クラスの動力学側面は、拘束パラメータ k によって分類され、その普遍性を特徴づける量は、 ζ または ν ではなく、 z である。将来その予想を確認するためには、より大きなサイズに対して、 ζ のより正確な見積もりをすることが必要であろう。さらに注意すべきことは、 z_* を z と同じだと思うためには、 $\alpha = \alpha_{\text{mrs}} \simeq 1.1$ とすれば良い。言い換えれば、もしある場合 $(c, k) = (c', k')$ について、 $\alpha_{\text{mrs}} z = z'$ となる α_{mrs} の値を知っていれば、任意の $(c, k) \neq (c', k')$ に対する、 z の値は、上で記述した摂動解析に依って導出できるとも言える。この文脈においては、 α_{mrs} は摂動次数 n と、その次数で解析可能な最小組み替えサイズを結びつける量と見なせる。

4.6 結び

この研究では、Bethe 格子上の FA 模型の動力学に関して系統的な摂動解析を構築した。この系統的摂動解析に依って、ある動的スケーリング則の存在が明らかになった。これにより、非エルゴード転移は弱い普遍性クラスをもつという示唆を得た。つまり、時間と長さに関する臨界指数 ζ, ν は普遍的ではなく、動的臨界指数 z が普遍的ということである。

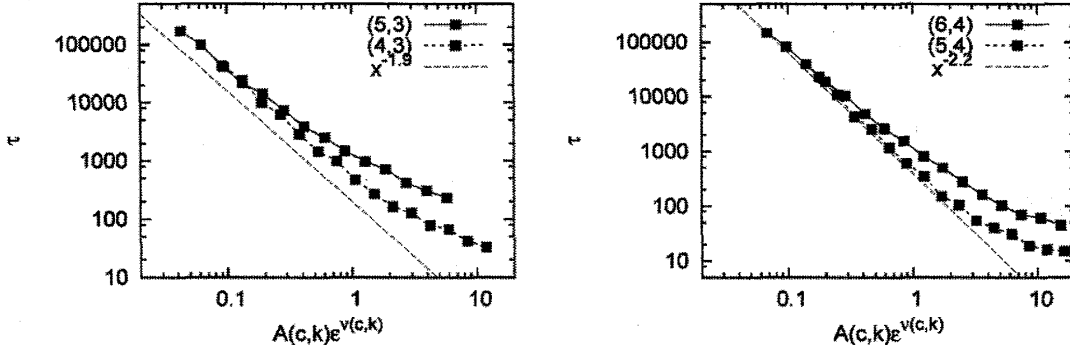


図 4.8: 緩和時間 $\tau(c, k) = A(c, k)^{z(k)} \mathcal{F}(k, A(c, k)e^{\nu(c, k)})$ 。ここで、 $A(4, 3) = 1$, $A(5, 3) = 1.2$ and $A(5, 4) = 1$, $A(6, 4) = 1.4$ である。 $\mathcal{F}(4, x) \simeq x^{-z(4)}$ とした時、 $z(4) \simeq 2.2$ であり、 $\mathcal{F}(3, x) \simeq x^{-z(3)}$ とした時、 $z(3) \simeq 1.9$ である。

ここで、この章の結果と先行研究との関係性を議論する。実際、MC 法に依って見いだされる持続時間は、モード結合方程式に依って記述されることが予想されている [7]。この主張は $n_c = \infty$ と矛盾しない。なぜなら、モード結合方程式は ∞ 次元微分方程式であるからである。加えて、模型とモード結合方程式との関係性を示唆する事実是最小サイズの組み替えの解析の文脈に置いても見いだされている [17]。これらの先行研究に加え、この章で得た結果は非エルゴード転移の動的普遍性の理解を押し進めたと言えよう。今後、この結果とモード結合方程式を比べることは、非エルゴード転移の普遍性クラスの動的側面の理解への一つの切り口になるだろう。

Bethe 格子上の強磁性 Ising 模型の場合と比べた時、この章で見いだした普遍性の別の面が現れる。強磁性 Ising 模型の場合、臨界指数は、この章で使った近似方法と同様な近似方法で解析することにより導出できる [15]。それゆえ、この章で扱った非エルゴード転移の普遍性クラスは、定量的にも定性的にもいくつかのスピノダル転移、少なくとも Ising 模型のクラスと異なる。ここで、「定性的」という言葉が意味することは、両者の差異は臨界指数の値だけではなくて、臨界指数を捉える閉じた力学系の存在までに及ぶということである。

最後に、この節の k コアパーコレーションと他の系における関連した相転移の間の関係性を議論する [19]。実際、熱力学極限の Erdős-Rényi ランダムグラフを消して行くある動力学の k コアパーコレーション転移点では、サドルノード分岐が起こる [20, 21]。さらに、熱力学極限におけるランダム磁場 Ising 模型のスピノダル転移は、 k コアパーコレーションに相当し、Bethe 格子上でサドルノード分岐に相当する [23, 24]。サドルノード分岐に相当する転移近くのこれらの動力学は、FA 模型の非エルゴード転移近くの動力学とはかなり異なる。この違いは、それぞれの系における、非回帰性の存在と関連しているかもしれない [22]。つまり、FA 模型は非回帰性をもたず、上記の他の系は持つ。この考察により、Kob-Andersen (KA) 模型のような他の拘束動力学模型における非エルゴード転移も、サドルノード分岐と異なる普遍性クラスに所属すると予想できる。なぜなら、KA 模型も非回帰性を持たないからである [3, 9]。最後に、ジャミング転移と k コアパーコレーションの静的性質との関係性を支持する先行研究に言及しておこう [25, 26]。ジャミング転移

を示す系も非回帰性を持たない故、拘束動力学模型との関係を明らかにすることは、将来の興味深い課題である。

参考文献

- [1] Cavagna A., *Phys. Rep.* **476** 51 (2009).
- [2] Fredrickson G. H. and Andersen H. C., *Phys. Rev. Lett.* **53** 1244 (1984).
- [3] Kob W. and Andersen H. C., *Phys. Rev. Lett.* **48** 4364 (1993).
- [4] Ritort F. and Sollich P., *Adv. Phys.* **52** 219 (2003).
- [5] Toninelli C. and Biroli G., *J. Stat. Phys.* **130** 83 (2007).
- [6] Cancrini N., Martinelli F., Roberto C. and Toninelli C., *J. Stat. M* L03001 (2007).
- [7] Sellitto M., Biroli G. and Toninelli C., *Europhys. Lett.* **69** 496 (2005).
- [8] Toninelli C., Biroli G. and Fisher D., *Phys. Rev. Lett.* **18** 185504 (2004).
- [9] Toninelli C., Biroli G. and Fisher D., *J. Stat. Phys.* **120** 167 (2005).
- [10] Eisinger S. and Jäckle J., *J. Stat. Phys.* **73** 643 (1993).
- [11] Kawasaki K., *Physica A* **215** 61 (1995).
- [12] Pitts S., Young T. and Andersen H. C., *J. Chem. Phys.* **113** 8671 (2000).
- [13] Pitts S. and Andersen H. C., *J. Chem. Phys.* **114** 1101 (2001).
- [14] Szamel G., *J. Chem. Phys.* **2004** 3355 (2004).
- [15] Semerjian G. and Weigt M., *J. Phys. A* **37** 5525 (2004).
- [16] Ohta H., *J. Phys. A* **43** 395003 (2010).
- [17] Semerjian G., *J. Stat. Phys.* **130** 251 (2007).
- [18] Montanari A. and Semerjian G., *unpublished note*.
- [19] Farrow C. L., Shukla P. and Duxbury P. M., *J. Phys. A* **40** F581 (2007).
- [20] Farrow C. L., Duxbury P. M. and Moukarzel C., *Phys. Rev. E* **72** 066109 (2005).
- [21] Iwata M. and Sasa S., *J. Phys. A* **42** 075005 (2009).

- [22] Dhar D., Shukla P. and Sethna J. P., *J Phys A: Math. Gen. J. Phys. A* **30** 5259 (1997).
- [23] Sabhabandit S., Dhar D. and Shukla P., *Phys. Rev. Lett.* **88** 197202 (2002).
- [24] Ohta H. and Sasa S., *Europhys. Lett.* **90** 27008 (2010).
- [25] Schwarz J. M., Liu A. J. and Chayes L. Q., *Europhys. Lett.* **73** 560 (2006).
- [26] Jeng M. and Schwarz J. M., *Phys. Rev. E* **81** 011134 (2010).

第5章 興奮型蔵本模型における集団動力学

5.1 先行研究と研究動機

非平衡条件下における集団現象の理解は、統計物理学において最も重要な問題の一つである。平衡条件下とは異なり、非平衡条件下における多体系の性質は、本質的に系の動力学にしばしば依存する。これによって、非平衡条件下の問題を系統的に研究することは難しくなる。

近年、神経網 [1] やその数学的模型 [2, 3] における臨界的振る舞いが、観測されている。それらは、典型的な結合した興奮性素子の例である。一般に、そのような臨界的振る舞いは、特異性を特徴づける臨界指数を基に、いくつかのクラスに分けられる。その分類は、結合興奮素子系における臨界現象に関する普遍性クラスの特定を可能にする。しかしながら、様々な要素が絡み合った現象であるが上に、その臨界性の機構を明らかにすることが難しい。ここで、平衡統計力学の理論における平均場 Ising 模型の役目を思い出してみると、結合興奮性素子の臨界現象を記述する最小模型の理論解析を可能にする方法論を、発展させることが必要なことは明らかである。

上記の目的を踏まえて、以前に提案されている単純な模型である、全結合の興奮型蔵本模型の解析を行う [4]。特に、サドルノード転移近くでの環境変数変化に対する、系の特異性に焦点を当てる。ちなみに、この系の興奮性は、この分岐に強く影響を受けている。このような転移に関する系の性質は、異なる興奮系において研究されている [2]。この章の主な結果は、サドルノード分岐近くでの特異な振る舞いを特徴づける臨界指数の理論的導出である。

5.2 模型

系の興奮性とは、時間軸に関するスパイクの存在で特徴づけられる。数学的に言えば、スパイクは微分方程式において、ホモクリニック軌道近くでの経路によって記述することができる。単純な例として、位相変数 $\phi \in [0, 2\pi]$ に対する、常微分方程式 $\partial_t \phi = \omega - h \sin \phi$ を考えよう。この方程式において、 $\omega = h$ の時、ホモクリニック軌道が存在する。その時、 h が僅かに ω より大きい時、 $\phi = \sin^{-1}(\omega/h)$ を満たす不安定固定点と安定固定点があり、安定固定点 ϕ_* に対する弱摂動は一つのスパイクを生み出すことになる。一方、 h が僅かに ω より小さいとき、系は長い周期を持つスパイクの列を見せることになる。このような経路の定性的変化は、サドルノード分岐の一例である。興奮素子の位相模型としてのこの単純な動力学を用いて、雑音の影響を考慮して、次の全結合型の結合興奮性素子 $\{\phi_i\}_{i=1}^N$

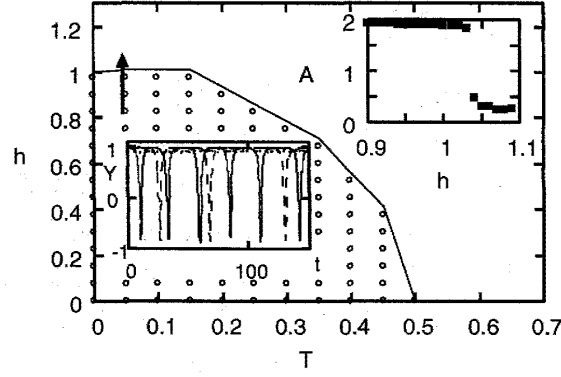


図 5.1: 相図。表示した曲線上の $\langle L \rangle$ は $0.097 < \langle L \rangle < 0.107$ を満たす。内枠: (右) h の関数としての振動の振幅 $A \equiv \langle [\max_t X(t) - \min_t X(t)] \rangle$ 。(左) Y の時間発展の典型例。 $h = 1.0$ (曲線), $h = 1.02$ (破線) と $h = 1.1$ (点線)。ここで, $T = 0.05$, $N = 100$ 。矢印は環境変数の変化の方向を示す。状態 $\langle L \rangle > 0.1$ に、印がつけられている。(注) [H. Ohta and S. Sasa, *Phys. Rev. E* **78** 065101(R) (2008).] からの引用であり、この章の他のすべての図も同論文からの引用である。

を考える [4]。

$$\partial_t \phi_i = \omega - h \sin \phi_i - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_i - \phi_j) + \xi_i. \quad (5.1)$$

但し、 $\xi_i(t)$ は Gauss 白色ノイズであり、 $\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2T \delta_{i,j} \delta(t - t')$ を満たす。一般性を失うことなしに、 $K = 1$ とし、 $\omega = 1$ の場合に制限する。変化させる環境変数は、 h と T である。この研究における全ての数値計算は、時間刻み $\delta t = 0.05$ の前進差分法を用いた。つまり、数値誤差は、時間刻みごとに $O((\delta t)^{3/2})$ である。ちなみに、中心差分法の場合は、数値誤差は $O((\delta t)^2)$ であり、 δt が十分小さければ、以下の研究に関しては結果は変わらない。

この系の協同的振る舞いは、次の複素振幅の時間発展によって記述される。

$$Z \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j}. \quad (5.2)$$

特に、実数 X, Y を使い、 $Z = X + iY$ と表示し、角運動量 $L \equiv X(\partial_t Y) - (\partial_t X)Y$ の期待値が振動相 ($\langle L \rangle \neq 0$) と定常相 ($\langle L \rangle = 0$) の区別に使われる [5]。図 5.1 において、環境変数空間 (T, h) において、 $0.097 < \langle L \rangle < 0.107$ を満たす曲線の形で、近似的な相図を示す。同様な相図は時間依存の位相の分布関数の振る舞いを調べることにより、[4] においても得られている。ここで、 $(T, h) \simeq (0, 1)$ から始まる曲線はサドルノード分岐と関わりがあり、一方、 $(T, h) \simeq (0.5, 0)$ から始まる曲線は Hopf 分岐と関係している。Takens-Bogdanov 型の分岐に起因する複雑な分岐図が $T = 0.1$ 近くで現れることに注意されたい [6]。

5.3 相図と集団発火現象

この研究では、サドルノード分岐近くの系に焦点を当てる。まず、 $T = 0.05$ と固定し、 h を下から分岐を跨ぐように変える。ここで、振動の振幅 $A \equiv \langle [\max_t X(t) - \min_t X(t)] \rangle$ は、分岐点で不連続に変化する。(図 5.1 内枠参照。) 振幅の不連続性は、集団的階層での超臨界 Hopf 分岐と対照的である。つまり、超臨界 Hopf 分岐では、振動の振幅は分岐点で連続的に変化する [7]。注意すべきことは、平衡系の臨界現象と同様に、連続転移は振幅揺らぎの臨界発散を導く [8] (概説としては [9, 10] を参照されたい)。そのような通常の場合と異なり、転移の不連続性は、臨界現象出現の指標とはならない。

それにも関わらず、サドルノード分岐での典型的時間スケールの発散という事実に基づき、スパイク間隔のゆらぎを考慮に入れる。明示的に、集団的振動の位相

$$\theta \equiv \arg(Z) \quad (5.3)$$

を用いて、スパイク間隔 \hat{I} を次のように定義する。 $\theta(t) = -\pi/2$ を満たす時刻 t に関して、 $\partial_t \theta$ の時間積分が 2π となるような、最小の時間間隔 $[t, t + \hat{I}]$ とする。 \hat{I} の最も基本的な統計量として、次で定義される平均とゆらぎ強度を測る。

$$I_*(h, N) \equiv \langle \hat{I} \rangle, \quad (5.4)$$

$$\chi(h, N) \equiv N \left(\langle \hat{I}^2 \rangle - \langle \hat{I} \rangle^2 \right). \quad (5.5)$$

熱力学極限での分岐点近傍での発散的振る舞いを決めるために、 $N = 10, 100$ と 1000 の系を用いて、有限サイズスケーリングを行った。まず、それぞれの系において、 $I_*(h, N)$ と $\chi(h, N)$ の値を、いくつかの h の値に対して、計算した。また、ある $(h_c - h)/h_c$ に対して、ある相関サイズが存在し、それが $((h_c - h)/h_c)^{-\nu}$ のように振る舞うことが予想できる。この予想を基に、次のスケーリング関数を仮定する。

$$I_*(h, N) \simeq N^{\zeta} F_I \left(\frac{H_c - h}{H_c} N^{\frac{1}{\nu}} \right), \quad (5.6)$$

$$\chi(h, N) \simeq N^{\lambda} F_{\chi} \left(\frac{H_c - h}{H_c} N^{\frac{1}{\nu}} \right). \quad (5.7)$$

そこで、指数 ν, ζ と λ と臨界値 h_c は、スケーリング則が有効になるように決めた。また、 \hat{I} の分布関数は、 $h = h_c$ で $\hat{I} N^{\zeta/\nu}$ の関数で表されることも仮定した。この仮定を (5.5) における $\chi(h, N)$ にも適用し、 $\lambda/\nu = 2\zeta/\nu + 1$ を見いだすことができる。つまり

$$\nu = \lambda - 2\zeta \quad (5.8)$$

である。おまけに、 $(h_c - h) N^{1/\nu} \gg 1$ の領域において、 I_* と χ は N と独立であるので、漸近的振る舞い $F_I(x) \simeq x^{-\zeta}$ と $F_{\chi}(x) \simeq x^{-\lambda}$ が導かれる。これらの考察から、図 5.2 と 5.3 で表示されているように、普遍的曲線への収斂が見られる値として、 $H_c = 1.0283$, $\nu = 3/2$, $\zeta = 1/2$, $\lambda = 5/2$ と見積もることができる。

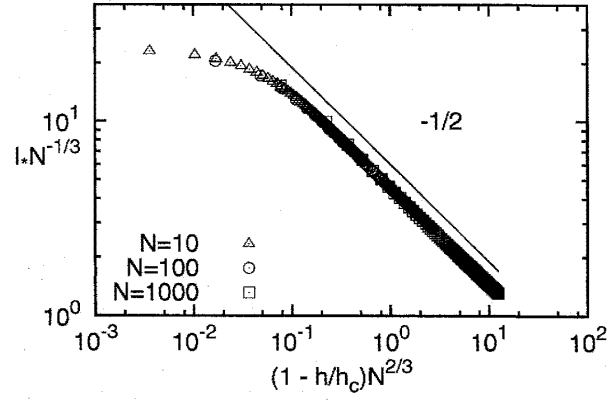


図 5.2: $(1 - h/H_c)N^{2/3}$ の関数としての $I_* N^{-1/3}$ 。ここで, $H_c = 1.0283$ 。直線は、指数 $-1/2$ の代数的関数である。

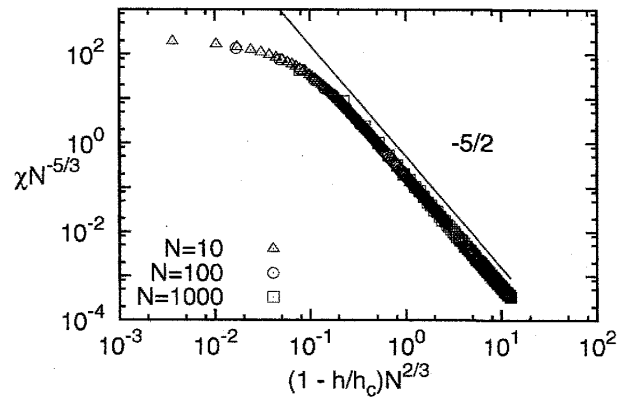


図 5.3: $(1 - h/H_c)N^{2/3}$ の関数としての $\chi N^{-5/3}$ 。ここで, $H_c = 1.0283$ 。直線は、指数 $-5/2$ の代数的関数である。

5.4 理論解析

ここから、 $\zeta = 1/2$ 、 $\lambda = 5/2$ と得られた結果に対する理論を構成する。 $(\nu$ は(5.8)から決まる。)以下の言明においては、 $\epsilon \equiv h_c - h$ が、十分小さい正の値であることを仮定し、与えられた ϵ の値に関して $N \rightarrow \infty$ 極限を考えることにする。

まず、十分に小さい T に関して、興奮性素子はほとんど同期していることを思い出すことにする。 $\phi_i = \theta + \delta\phi_i$ とし、 $|\delta\phi_i| \ll 1$ を仮定する。この仮定と(5.3)で与えられる θ の定義から、次の方程式を導くことができる。

$$\partial_t \theta = \omega - h \sin \theta + \eta. \quad (5.9)$$

ただし、 $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2(T/N)\delta(t-t')$ であり、 θ の時間発展方程式への $O(\sum_{i=1}^N (\delta\phi_i)^2/N)$ の寄与は無視した。この近似の範囲内で、 H_c は $h_c = \omega$ となる。解析対象である方程式はかなり単純化した。臨界指数の計算は依然として非自明なままである。最近の研究[11]において、 $\theta \simeq \pi/2$ 近傍の領域から脱出する時間のゆらぎの発散が、本質的に(5.9)と同じと予想される模型において導出されている。その計算では、いくつかの確率過程の特別な知識[12]が必要であるが、ここでは、臨界指数の値を決める異なる方法を構成する。有限次元系を考える際には、今から構成される方法が上述の先行研究よりも役に立つ可能性がある。

解析の基本方針は、時間間隔 $\Delta t = MI_*$ における時間平均周波数 $\hat{\Omega}$ の分布関数を考えることである。但し、 M は ϵ に依存しない大きい数である。 $(\Delta t$ が ϵ に依存することに注意。)明示的に、

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt (\partial_t \theta) \quad (5.10)$$

に対して、次で表現される大偏差性質を仮定する。

$$P(\hat{\Omega} = \Omega) \simeq e^{-MNG(\Omega)/T}. \quad (5.11)$$

そこで、 $\Omega = \Omega_*$ の時、速度 $G(\Omega)$ 関数は最小値0をとる。ちなみに(5.4)における I_* と $2\pi/\Omega_*$ は同じである。

ここから、速度関数 $G(\Omega)$ を評価する。 $[\theta]$ を経路 $(\theta(t))_{t=0}^{\Delta t}$ とし、 $\theta(0)$ は任意の値に固定する。そのとき、経路の確率分布は次のように表される。

$$\mathcal{P}([\theta]) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{N}{4T} \int_0^{\Delta t} dt [(\partial_t \theta - f(\theta))^2 + \frac{2T}{N} f'(\theta)]}. \quad (5.12)$$

そこで $f(\theta) = \omega - h \sin \theta$ であり、 f' は θ に関する微分を表し、 Z は規格化因子である。最後の項はノイズ系列 $(\eta(t))_{t=0}^{\Delta t}$ から経路 $[\theta]$ への変換に付随するJacobi行列式に相当する。ちなみに、離散化にあたって、標準的な計算を保証するために中心差分を用いている。形式的に $P(\hat{\Omega} = \Omega)$ を次のように表す。

$$P(\hat{\Omega} = \Omega) = \int \mathcal{D}[\theta] \mathcal{P}([\theta]) \delta \left(\Omega - \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt (\partial_t \theta) \right). \quad (5.13)$$

次に、熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ において、最も支配的な重みを持つ経路を考える。Jacobi行列式は、 $1/N$ の寄与により、この解析では有意でないことに注意する。 θ_Ω^0 で示される経路は、変

分方程式 $\partial_t^2 \theta(t) = -\partial_\theta U(\theta)/2$ において周期 $2\pi/\Omega$ をもつ解とする。但し、 $U(\theta) = -f(\theta)^2$ である。解 $\theta_\Omega^s(t)$ はエネルギー保存の方程式から得られ、それは次を導く。

$$\partial_t \theta_\Omega^s = \sqrt{E(\Omega) - U(\theta_\Omega^s)}. \quad (5.14)$$

ここで $E(\Omega)$ は次で決まる定数である。

$$\frac{2\pi}{\Omega} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{E(\Omega) - U(\theta)}}. \quad (5.15)$$

θ_Ω^s は、他の $2\pi/\Omega$ -周期の経路よりも $P(\hat{\Omega} = \Omega)$ へより寄与をするので、 $P(\hat{\Omega} = \Omega) \simeq P([\theta_\Omega^s])$ と近似するのは合理的であろう。(5.14) を (5.12) に代入することにより、次を得る。

$$G(\Omega) = \frac{I_* \Omega}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{(\sqrt{E(\Omega) - U(\theta)} - \sqrt{-U(\theta)})^2}{\sqrt{E(\Omega) - U(\theta)}}. \quad (5.16)$$

Ω_* が条件 $E(\Omega_*) = 0$ を満たす場合には $dG(\Omega)/d\Omega|_{\Omega_*} = 0$ と $G(\Omega_*) = 0$ 得ることができる。それゆえ、 Ω が Ω_* に近い時、速度関数 $G(\Omega)$ は、次の2次形式を持つことがわかる。

$$G(\Omega) = B(\epsilon) \Omega_*^{-4} (\Omega - \Omega_*)^2. \quad (5.17)$$

ここで $B(\epsilon)$ は次のように計算される。

$$B(\epsilon) = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} \epsilon^{5/2} + O(\epsilon^{7/2}). \quad (5.18)$$

さらに、 $E = 0$ の下で (5.15) を考慮し、次を得る。

$$\Omega_* = \sqrt{2 - \epsilon} \epsilon^{1/2}. \quad (5.19)$$

今、時間間隔 Δt における、 \hat{I} の平均 \hat{J} を考える。容易に、 $\hat{J} = 2\pi/\hat{\Omega}$ が確認できる。その時、(5.11) と (5.17) における変数変換を行うことにより、次を得る。

$$P(\hat{J} = J) \simeq e^{-MNB(\epsilon)(J - 2\pi/\Omega_*)^2/(4\pi^2 T)}. \quad (5.20)$$

(5.18) と (5.19) を (5.20) 代入することにより、 $\langle \hat{J} \rangle \simeq \epsilon^{-1/2}$ と $\langle (\hat{J} - \langle \hat{J} \rangle)^2 \rangle \simeq \epsilon^{-5/2}$ を見いだすことができる。これらの ϵ 依存性は、 I_* と χ のそれと同じであるべきなので、 $\zeta = 1/2$ 、 $\lambda = 5/2$ という理論結果を得ることができる。これらの値は数値的値と完全に一致している。

さらに、上述の解析により、拡散係数 $D \equiv \Delta t \langle (\hat{\Omega} - \Omega_*)^2 \rangle / 2$ に関する新しい公式を得ることもできる。ここで $\hat{\Omega} = (\theta(\Delta t) - \theta(0))/\Delta t$ を使った。実際、(5.11) から次を得る。

$$D = \frac{T}{2N} \frac{I_*}{G''(\Omega_*)}. \quad (5.21)$$

これにより、ベキ的振る舞い $D = (3T/32\sqrt{2}\pi N)\epsilon^{-1} + O(\epsilon^0)$ も導くことができる。ここで、クロスオーバー関係 $\epsilon \simeq (N/T)^{-2/3}$ から $D \simeq (T/N)(N/T)^{2/3}$ ($\epsilon = 0$) と予想できる。これは、[13] で報告されたものと同じである。

5.5 結び

サドルノード分岐近傍での臨界的振る舞いを示す単純な模型を研究した。結合興奮性素子の模型に対し、ベキ的発散 $\chi \simeq \epsilon^{-5/2}$ を計算した。このようなベキ的振る舞いは、実際の実験系でも観測される可能性がある。実際の系との関係性の観点からは、ここでの理論を発展させることによって、より込み入ったネットワークや積分発火動力学を持つ複雑な系を解析できる可能性がある。

有限次元系の解析は、次の理論解析の問題として挙げられる。なぜなら、今回構成した理論は、もし興奮性素子がサドルノード分岐近傍でほとんど同期してさえいれば、より一般の場合に適用できる可能性があるからである。まずは、平衡系と同じように、臨界指数の値が、全結合のそれと同じであるような上部臨界次元を決めたい。それから、「非 Gauss 的な」ゆらぎを考慮に入れた系統的方法を発展させることが道の一つである。

この論文を終える前に、振動の振幅がサドルノード分岐点で不連続転移を示すことを思い出そう。ここで注意すべきことは、不連続転移と臨界揺らぎの共存はジャミング転移の注目すべき性質の一つである [14]。これは偶然の一致ではなく、以下のように説明し得る。

ジャミング転移近傍の臨界性の標準的な特徴付けは、非線形帯磁率 $\chi_4(t)$ に基づいている。これは時間間隔 t における、粒子が周りの粒子から抜け出す事象のゆらぎを特徴づけている [15]。 $\chi_4(t)$ に関するいくつかの理論 [16, 17, 18] の中で、[18] は $\chi_4(t)$ の発散は粒子が周りの粒子から抜け出す時間の臨界揺らぎに起因することを示唆する。[18] の方法を用いることによって、今回の問題でもゆらぎの振幅が発散する様子を議論することができる。さらに、ランダムグラフの k コアパーコレーションのある動力学が、パーコレーション点でサドルノード分岐を示すことも最近示された [19]。 k コアパーコレーションは、拘束動力学模型やランダム磁場 Ising 模型と関係することが知られているので [20, 21, 22, 23, 24]、今回の研究は、そのような系の理論解析にも役立つ可能性がある。

参考文献

- [1] Segev R., Benveniste M., Hulata E., Cohen N., Palevski A., Kapon E., Shapira Y. and Ben-Jacob E., *Phys. Rev. Lett.* **88** 118102 (2002). Beggs J. M. and Plentz D., *J. Neurosci.* **23** 11167 (2003). Schneidman E., Berry M. J., Segev R. and Bialek W., *Nature* **440** 1007 (2006).
- [2] Sakaguchi H., *Prog. Theor. Phys.* **92** 1039 (1994). Eurich C. W., Herrmann J. M. and Ernst U. A., *Phys. Rev. E* **66** 066137 (2002). Haldeman C. and Beggs J. M., *Phys. Rev. Lett.* **94** 058101 (2005). Kinouchi O. and Copelli M., *Nat. Phys.* **2** 348 (2006). Buice M. A. and Cowan J. D., *Phys. Rev. E* **75** 051919 (2007).

- [3] Levina A., Herrmann J. M. and Geisel T., *Nat. Phys.* **3** 857 (2007). Teramae J. and Fukai T., *J. Comput. Neurosci.* **22** 301 (2007). Pellegrini G. L., de Arcangelis L., Herrmann H. J. and Perrone-Capano C., *Phys. Rev. E* **76** 016107 (2007).
- [4] Shinomoto S. and Kuramoto Y., *Prog. Theor. Phys.* **75** 1105 (1986).
- [5] Kuramoto Y., Aoyagi T., Nishikawa I., Chawanya T. and Okuda K., *Prog. Theor. Phys.* **87** 1119 (1992).
- [6] Sakaguchi H., Shinomoto S. and Kuramoto Y., *Prog. Theor. Phys.* **79** 600 (1988).
- [7] Kuramoto Y., *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin (1984).
- [8] Daido H., *J. Stat. Phys.* **60** 753 (1990).
- [9] Strogatz S. H., *Physica D* **143** 1 (2000).
- [10] Acebron J. A., Bonilla L. L., Perez C. J., Ritort F. and Spigler R., *Rev. Mod. Phys.* **77** 137 (2005).
- [11] Lindner B., Longtin A. and Bulsara A., *Neural Comp.* **15** 1761 (2003).
- [12] Arecchi F. T. and Politi A., *Phys. Rev. Lett.* **45** 1219 (1980).
- [13] Reimann P., Van den Broeck C., Linke H., Hanggi P., Rubi J. M. and Perez-Madrid A., *Phys. Rev. E* **65** 031104 (2002).
- [14] Toninelli C., Biroli G. and Fisher D. S., *J. Stat. Phys.* **120** 167 (2005).
- [15] Yamamoto R. and Onuki A., *Phys. Rev. E* **58** 3515 (1998).
- [16] Biroli G. and Bouchaud J. P., *Europhys. Lett.* **67** 21 (2004).
- [17] Biroli G., Bouchaud J. P., Miyazaki K., and Reichman D. R., *Phys. Rev. Lett.* **97** 195701 (2006).
- [18] Iwata M. and Sasa S., *Europhys. Lett.* **77** 50008 (2007).
- [19] Iwata M. and Sasa S., *J. Phys. A* **42** 075005 (2009).
- [20] Sellitto M., Biroli G. and Toninelli C., *Europhys. Lett.* **69** 496 (2005).
- [21] Schwarz J. M., Liu A. J. and Chayes L. Q., *Europhys. Lett.* **73** 560 (2006).
- [22] Sabhapandit S., Dhar D. and Shukla P., *Phys. Rev. Lett.* **88** 197202 (2002).
- [23] Farrow C. L., Shukla P. and Duxbury P. M., *J. Phys. A* **40** 581 (2007).
- [24] Ohta H. and Sasa S. I., *Phys. Rev. E* **77** 021119 (2008).

第6章 総括

2章、3章、4章、5章において、間欠的集団動力学出現に関わる数理構造を捉えるための理論的方法を発展させ、実際にそのような数理構造を見いだして来た。見いだされた数理構造の普遍性の度合い、つまり他の系でどれくらい見いだされるか、についてはさらなる研究が必要であろう。序論で述べたように、これらの章で扱った多体系は、ジャミング転移やガラス転移を示す多体系と共通の面を持っている。従って、この論文で見いだした普遍性や理論的方法は、将来的に、ジャミング転移やガラス転移に伴う集団動力学の普遍性（例えば臨界指数）を理解するのに貢献する可能性が十分にあると言えよう。

最後に、いくつかの話題について触れる。まず一つ目は、見いだされた各数理的構造が、この論文で扱った系の範囲内でどのくらいの普遍性を持つかについてである。二つ目は、ガラス転移やジャミング転移と深く関わる動的ガラス転移とこの論文で扱った現象との関係性である。

6.1 各章に渡ってみられる普遍性

6.1.1 サドルの存在

まず、3章、4章、5章の相転移は、力学系理論の言葉で言えば、サドルの消失または出現と密接に関係している。より具体的には、3章と5章の相転移動力学を記述する数理構造はサドルノード分岐である。また、4章の相転移の静的性質はサドルノード分岐の静的性質と同等である。但し、対応する動力学はサドルノード分岐のものではなく、はっきりしたことはわかっていない。ともかく、間欠的集団動力学出現の一つの普遍的様式は、サドルの消失、生成であると言える。

6.1.2 スピン模型の動力学の解析枠組み

解析手法としては、2章と4章では、ほぼ同じ解析手法を用いている。実は、この解析手法は3章の問題に関しても適用可能である。さらには、有限個の状態のスピン変数と有限個の状態のボンド値を持つ系であれば、同じ解析手法が適用可能である。但し、その有効性は系の選択に依存する。従って、今後スピン模型の動力学における普遍性に関する知見を蓄積させるのと同時に、解析手法の有効性と系の性質との関係性に関する知見も蓄積していかなければならない。

6.2 動的ガラス転移とこの論文で得られた知見との関係

この論文では、ガラス転移やジャミング転移については立ち入らずに、そこに向かう際に立ちはだかる問題群についての知見の蓄積に努めてきた。最後に、少し立ち入ってこの論文で得られた結果との関係性について触れたい。とはいっても、ガラス転移やジャミング転移について詳細を述べることは、この博士論文の枠を大きく越える [1]。幸か不幸か、この論文の結果と関わりそうな現象は、二つの相転移に深く関わる動的ガラス転移と呼ばれるものだけである。よって、ここからは動的ガラス転移について紹介をし、博士論文で得られた結果との関係性を述べるにとどめる。

6.2.1 動的ガラス転移

まず、 $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ に対してハミルトニアン $H(\sigma)$ があるとする。ここで、2つのスピン配置 σ, σ' に対して、 $q_i(\sigma, \sigma') \equiv \sigma_i \sigma'_i$ 、 $\mathbf{q} \equiv (q_1, \dots, q_N)$ を定義する。これを用いて、次のようにレプリカポテンシャル W を定義する。つまり、 $W(\mathbf{q}) \equiv -\log Z_{\mathbf{q}}(\sigma)/N$ で、 $Z_{\mathbf{q}}(\sigma) \equiv Z \sum_{\sigma'} \exp(-H(\sigma)/T) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}(\sigma, \sigma')) / \sum_{\sigma'} \exp(-H(\sigma')/T)$ である。ここで、注意すべきことは $A(\sigma)$ は平衡状態のあらゆるスピン配置 σ に関する A の平均である。この枠組みの中で、動的ガラス転移とは、高温から温度を下げて行くと、ある温度 T_d で W の極小値が一つから二つになることと定義される。この系において、詳細釣り合いを満たす確率的動力学を考え、動的ガラス転移付近での次の2つの帯磁率の振る舞いを考えてみる。一つは、 $Q_{\sigma, \sigma'} \equiv \sum_i q_i(\sigma, \sigma')/N$ として、 $\chi_f(t) \equiv N \langle Q_{\sigma, \sigma'}^2 \rangle - \langle Q_{\sigma, \sigma'} \rangle^2$ であり、もう一つは $\chi_s(t) \equiv N \langle Q_{\sigma, \sigma'}^2 \rangle - \langle Q_{\sigma, \sigma'} \rangle^2$ である。ここで、 $\langle A \rangle$ は σ から時間 t 後の、スピン配置 σ' に関する平均である。転移温度からの距離 $T = T_d + \epsilon$ に関して、 $\max_t \chi_f(t) \simeq \epsilon^{-\gamma_f}$ 、 $\max_t \chi_s(t) \simeq \epsilon^{-\gamma_s}$ ($\gamma_f = 1, \gamma_s = 1/2$) となることが知られている [2]。

動的ガラス転移を示す具体的な系としては、例えば球形 p 体相互作用スピングラス模型がある。このハミルトニアン ($p = 3$ の場合) は、 $\sigma_i \in \mathbb{R}$ に対して、 $H = \sum_{ijk} J_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k$ であり、 J_{ijk} は Gauss 分布とし、 $\sum_i \sigma_i = N$ という制限がつく。完全グラフ上のこの模型の Langevin 動力学に関しては、時間相関関数で閉じた厳密な時間発展方程式が導出されている。実際、その時間発展方程式が T_d で非エルゴード転移を示すことが知られている。このような動的ガラス転移を記述する厳密な時間発展方程式の導出は、他の系では成功していない。ただし、モード結合近似とよばれる解析手続きを使って、様々な系において、時間発展方程式の近似導出は行われている。逆にいえば、この解析手続きが厳密になるのが完全グラフ上の球形 p 体相互作用スピングラス模型であると言える。

6.2.2 ランダム磁場 Ising 模型

実は、最近スピングラス模型の動的ガラス転移の静的性質は、ランダム磁場 Ising 模型と等価であることが発見されている [2]。具体的に3章の文脈においては、 $R < R_{sp}$ において、 $\chi_f(t) \equiv N \langle \hat{m}^2 \rangle - \langle \hat{m} \rangle^2$ 、 $\chi_s(t) \equiv N \langle \hat{m}^2 \rangle - \langle \hat{m} \rangle^2$ という量 (帯磁率) を考える。 χ_f はランダム磁場に関するゆらぎ、 χ_s は確率的動力学に関するゆらぎで、どちらもランダム

磁場 Ising 模型の量である。実は、3 章の臨界指数を導出した時と同様な議論を用いて、 $\max_t \chi_f(t) \simeq e^{-\gamma'_f}$, $\max_t \chi_s(t) \simeq e^{-\gamma'_s}$ とした時、 $\gamma'_f = \gamma_f$, $\gamma'_s = \gamma_s$ であることが言える。つまり、上記の量（またはそれに関連するいくつかの量）に着目する限りにおいては、スピノダル転移がスピングラス模型の動的ガラス転移に相当すると言える。3 章のスピノダル転移の端点 R_c は、 p 体相互作用スピングラス模型では、 $p = p_c$ ($2 < p_c < 3$) に対応するといってもよいかもしれない。なぜなら、 $p = 2$ では動的ガラス転移がないことが知られているからである。（この p が非整数の意味は、例えば $p = 3$ と $p = 2$ のサイトを混ぜて、それらの平均として新たに p を定義すればよいだろう。）このような対応関係の意義については、未だ完全には整理されておらず、これからの展開が期待される。

6.2.3 興奮型蔵本模型

6.2.1 で述べたことは、次のことも示唆する。まず、6.2.1 で言うスピノダル転移は、2 章の結果からサドルノード分岐であることに注意する。5 章の興奮型蔵本模型において、ノイズ強度 0 で興奮性強度に関する不純物があれば、5 章と同様なサドルノード転移が起こることが予想される。つまり、不純物ありの興奮型蔵本模型の帯磁率の臨界指数は γ_f, γ_s と同じである可能性が高い。これを、実際に示すことは将来の課題として残っている。

6.2.4 拘束動力学スピン模型

Bethe 格子上的 p 体相互作用スピングラス模型の動的ガラス転移においては、ある相関サイズ N 、緩和時間 τ の臨界指数がグラフの結合数に依存する。それにも関わらず、それらをつなぐ動的臨界指数 z ($\tau \simeq N^z$) がグラフの結合数に依存しない、という予想が立てられている [3]。実は、拘束動力学模型の非エルゴード転移は動的ガラス転移と同じ普遍性クラスであるという予想がある。これを信じるとすると、4 章で得た内容は、上の p 体相互作用スピングラス模型に関する予想を支持し、またより踏み込んだ予想を導く。つまり、4 章で得た内容は、動的臨界指数がグラフの結合数に依存しなく、拘束パラメータ k に依存するというものである。拘束動力学模型で得たこの示唆を、 p 体相互作用スピングラス模型の文脈に置く場合は、拘束パラメータ k に相当する量は何かということに答えなければならないが、それはおそらく p である。つまり、 p 体相互作用スピングラス模型の動的臨界指数は、 p に依存するということが強く示唆されるのである。拘束動力学模型で行った解析は、複雑ではあるが、原理的には p 体相互作用スピングラス模型に適用できる。ここで得られた予想も将来確かめるべきものとして残っている。

参考文献

- [1] Mézard M. and Montanari. A., *Information, Physics, and Computation*, Oxford university (2009).

- [2] Franz S., Parisi G., Ricci-Tersenghi F. and Rizzo T., *arXiv:1008.0996*.
- [3] Montanari A. and Semerjian G., *Phys. Rev. Lett.* **94** 247201 (2004).

第7章 付録

7.1 Bethe 格子

統計物理学は、様々な空間上（舞台）に定義されたモデルをしばしば扱う。この付録では、Bethe 格子と呼ばれる舞台について簡単な解説を行う [1]。以下に取り上げる正則ランダムグラフ、Erdős-Rényi ランダムグラフ、Cayley 木と呼ばれる3つのグラフは、しばしば Bethe 格子と呼ばれる。ここでは、具体的な構成方法を解説する。

7.1.1 正則ランダムグラフの構成方法

結合数 c で N 点の頂点からなるランダムグラフの構成方法について簡単に解説する。まず、それぞれの頂点を c 個用意し、 cN 個の頂点から無作為に2個選ぶ。これを繰り返し全ての頂点の組が選ばれるまで行う。ただし、同じ頂点の組ができてしまった場合、最初からやり直す。こうして、それぞれの頂点が結合数 c を持つグラフが構成できる。このグラフには最小 $O(\log N)$ のループがあることが知られている。詳しくは、文献 [2] を参照されたい。

7.1.2 Erdős-Rényi ランダムグラフの構成方法

ついでに Erdős-Rényi ランダムグラフについて触れる。結合数 c の Erdős-Rényi ランダムグラフとは全ての頂点の組候補に対して、 c/N の確率で組するグラフのことであり、実際そのように構成することができる。このとき、結合数 k の分布が、 $N \rightarrow \infty$ で Poisson 分布 $P(k) \simeq \frac{e^{-c} c^k}{k!}$ となることが知られている。

7.1.3 Cayley 木の構成方法

結合数 c で世代 g の Cayley 木とは以下で定義される。まず根という頂点を用意しそれを世代0とする。そこから $c-1$ 個の頂点をつなぐ。次に、新しく繋がれた $c-1$ 個の頂点それぞれから、また $c-1$ 個の頂点を繋ぐ。これを g 回繰り返すことにより構成することができる。つまり、このグラフの頂点数 N は $N = 1 + (c-1)^g$ となる。

7.2 力学系理論における分岐とゆらぎの影響

統計物理学の平均場模型においては、熱力学極限で、しばしば力学系理論における分岐が起きる。また、一般に有限系にはゆらぎが存在する。よってここでは、力学系理論における分岐と、ゆらぎの分岐構造への影響を簡単に解説する。

ある力学系 $dx/dt = F(x; p)$ において、 $F(x_0; p) = 0$ である $x_0(p)$ の p 依存性を考える。 x が 1 変数の場合以下のようなことが起こりうる。

7.2.1 ピッチフォーク分岐

$p > p_c$ において、 $x_0(p) = x_*$ であり、 $p \leq p_c$ において、 $x_0(p) = x_1, x_2$ ($x_1 \neq x_2$) でどちらも安定であるとする。

このような状況の下で、 $p = p_c + \epsilon$ ($\epsilon \ll 1$) の場合、 $x = x_* + \phi$ 付近の振る舞いに関しては、以下の方程式で記述されることがわかっている。

$$\frac{d\phi}{dt} = \epsilon\phi - \phi^3. \quad (7.1)$$

これから、典型的な時間尺度 τ は、 $\tau \simeq \epsilon^{-1}$ 、また、右辺が 0 となる ϕ_* は、 $\phi_* \simeq \epsilon^{1/2}$ となることがわかる。

強度 $\sqrt{N^{-1}}$ の Gauss 白色雑音を与えられた時に、上記のようなスケーリングが見える ϵ の領域は、 $N > N_c = \epsilon^{-2}$ である。 N_c は、 ϕ の経路積分表示において、「主要項と Jacobi 行列式が ϵ に対して同じ次数である」という仮定から簡単に導かれる。

7.2.2 サドルノード分岐

$p > p_c$ において、 $x_0(p)$ はなしであり、 $p = p_c$ において、 $x_0(p) = x_*$ 、 $p < p_c$ において、 $x_0(p) = x_1, x_2$ ($x_1 \neq x_2$) で、どちらかが安定でもう一方は不安定とする。

このような状況の下で、 $p = p_c + \epsilon$ の場合、 $x = x_* + \phi$ 付近の振る舞いに関しては、以下の方程式で記述されることがわかっている。

$$\frac{d\phi}{dt} = \epsilon - \phi^2. \quad (7.2)$$

これから、 $\tau \simeq \epsilon^{-1/2}$ 、 $\phi_* \simeq \epsilon^{1/2}$ もわかる。また、 $N_c = \epsilon^{-3/2}$ となる。

7.2.3 トランスクリティカル分岐

$p > p_c$ において、 $x_0(p) = x_1, x_2$ ($x_1 \neq x_2$)、 x_1 が安定、 x_2 が不安定とする。 $p = p_c$ において、 $x_0(p) = x_*$ で中立。 $p < p_c$ において、 $x_0(p) = x'_1, x'_2$ ($x_1 \neq x_2$) で、但し $dx_1/dp|_{p_c} = dx'_1/dp|_{p_c}$ である。このとき、 x'_1 は不安定、 x'_2 は安定とする。

このような状況の下で、 $p = p_c + \epsilon$ の場合に、 $x = x_* + \phi$ 付近の振る舞いに関しては、以下の方程式で記述されることがわかっている。

$$\frac{d\phi}{dt} = \epsilon\phi - \phi^2 \quad (7.3)$$

これから、 $\tau \simeq \epsilon^{-1}$ 、 $\phi_* \simeq \epsilon^1$ もわかる。また、 $N_c = \epsilon^{-3}$ となる。

7.2.4 高次元力学系における分岐

2変数で起こる分岐の例として、Hopf分岐がある。一般に、高次元にいけばいくほどより複雑な分岐構造が起こりうる。詳しくは、文献[3]を参照されたい。また、確率過程については文献[4]を参照のこと。

参考文献

- [1] Mézard M. and Parisi G., *Eur. Phys. J. B* **20** 217 (2001).
- [2] B. Bollobás, *Random Graphs*, CUP Cambridge, (2001).
- [3] Guckenheimer J. and Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York (1983).
- [4] Gardiner C., *Handbooks of stochastic processes*, Springer-Verlag (2004).

謝辞

指導教員の佐々真一さんには5年間に渡ってご指導頂き大変お世話になりました。佐々さんの助言、批判、励ましにより、研究への取り組み方を身につけることができたと思っています。

また、佐々研助教の小林未知数さん、OBの波多野恭弘さん、松尾美希さん、稲垣紫緒さん、林久美子さん、大槻道夫さん、中村壮伸さん、岩田真実さん、観山正道さん、そして後輩にもお世話になりました。研究室外でも東大院総合文化教授の、金子邦彦さん、佐野雅己さん、准教授の福島孝治さん、加藤雄介さん、学習院大教授の田崎晴明さん、京都大学教授の太田隆夫さん、早川尚男さん、助教の中尾裕也さん、大関真之さん、東京工業大学教授の樺島祥介さん、お茶の水女子大学教授の出口哲生さん、筑波大学准教授の宮崎洲正さん、大阪大学助教の吉野元さん、理化学研究所の寺前順ノ介さんに大変お世話になりました。特に、宮崎さんと吉野さんには海外の研究生生活についても、多くの有用な助

言を頂き感謝しております。また、ほぼ同年代の中島千尋さん、竹内一将さん、渡辺有祐さん、沙川貴大さん、平岩徹也さん、坂田綾香さん、中島哲也さんにも感謝したいです。外国で訪問を受入れてくれた Olivier Dauchot さん、Martin-Luc Rosinberg さん、Gilles Tarjus さんと Guilhem Semerjian さん、Julian Deseigne さんにも感謝したいです。特に Guilhem Semerjian さんによる助言は、研究を大きく前に進めることになり、大変感謝しております。また Leticia Cugliandolo さん、Lenka Zdeborová さんと Florent Krzakala さんには、海外での研究生活についてお世話になりました。また、Leuven で開かれたサマースクールで多くの時間を一緒に過ごした、コロンビア出身の大学院生 John Realpe-Gomez さんとの議論、雑談からも多くのことを学びました。感謝致します。

最後に、多くの人（著者の家族を含む）からすると特殊なこの業界に居残る決断をした時に、著者を信頼し「好きなようにしたら」と言ってくれた家族に感謝します。その言葉がなければ、上で感謝の意を表明させて頂いた方との出会いはなかっただろうし、確実にこの論文は存在しませんでした。

著者論文リスト

1. Critical fluctuations of time-dependent magnetization in a random-field Ising model
H. Ohta and S. Sasa, *Phys. Rev. E* **77** 021119 (2008).
2. Critical phenomena in globally coupled excitable elements
H. Ohta and S. Sasa, *Phys. Rev. E* **78** 065101(R) (2008).
3. A universal form of slow dynamics in zero-temperature random-field Ising model
H. Ohta and S. Sasa, *Europhys. Lett.* **90** 27008 (2010).
4. Multi-step relaxations in the Glauber dynamics of a bond-diluted Ising model on a Bethe lattice
H. Ohta, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** 395003 (2010).
5. Systematic perturbation approach for a dynamical scaling law in a kinetically constrained spin model
H. Ohta, *J. Stat. Mech.* P01032 (2011).